8.3.3 Splátky dluhů

Předpoklady: 080302

Splácení dluhů
Méně příjemnou součástí finanční matematiky je výpočet splátek dluhu.

Př. 1: Banka poskytla podnikateli koncem roku 2007 úvěr ve výši 1 000 000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 15% (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit ve třech stejných splátkách vždy na konci roku (tedy splátky budou na konci prosince 2008, 2009 a 2010). Urči výši jedné splátky. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Budeme postupně sledovat výši dluhu, který má podnikatel vůči bance.
Výši splátky označíme s

Konec roku 2007 … 10^6

Konec roku 2008, před splátkou … $10^6(1+0,15)$ (dluh se zvětšil, protože se banka připsala úroky z půjčky)

Konec roku 2008, po 1. splátce … $10^6(1+0,15)-s$

Konec roku 2009, před splátkou …
$$\left[10^6(1+0,15)-s\right](1+0,15)=10^6(1+0,15)^2-s(1+0,15)$$ (k nesplacené částce si banka připsala úroky z půjčky)

Konec roku 2009, po 2. splátce … $10^6(1+0,15)^2-s(1+0,15)-s$

Konec roku 2010, před splátkou …
$$\left[10^6(1+0,15)^2-s(1+0,15)-s\right](1+0,15)=10^6(1+0,15)^3-s(1+0,15)^2-s(1+0,15)$$
(k nesplacené částce si banka připsala úroky z půjčky)

Konec roku 2010, po 3. splátce …
$$10^6(1+0,15)^3-s(1+0,15)^2-s(1+0,15)-s=0$$ (úvěr je splacen)

Spočítáme s: $10^6(1+0,15)^3=s\left[(1+0,15)^2+(1+0,15)+1\right]$

Modře vyznačený výraz je součtem prvních tří členů geometrické posloupnosti $a_1=1$, $q=1+0,15$ $\Rightarrow$ výraz můžeme zjednodušit pomocí vzorce pro součet prvních n členů geometrické řady (v tomto případě to není velké zjednodušení, ale v případě většího množství splátek je to jasné zjednodušení)

$$10^6(1+0,15)^3=s\frac{(1+0,15)^3-1}{(1+0,15)-1}$$

$$10^6(1+0,15)^3=s\frac{(1+0,15)^3-1}{0,15}$$

$$s=\frac{10^6(1+0,15)^3\cdot 0,15}{(1+0,15)^3-1}=437\,977\ \text{Kč}$$

Celková částka zaplacená podnikatelem $3\cdot 437\,977=1\,313\,930\ \text{Kč}$

Zaplaceno na úrocích: $1\,313\,930-1\,000\,000=313\,930\ \text{Kč}$

Podnikatel zaplatil úvěr ve třech splátkách po 437 977 Kč, na úrocích pak zaplatí 313 930 Kč.

Př. 2: Banka poskytla podnikateli koncem roku 2007 úvěr na 10 let ve výši 1 000 000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 15% (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit v deseti stejných splátkách vždy na konci roku. Urči výši jedné splátky. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Můžeme odvozovat stejně jako v předchozím příkladu:

Konec roku 2017, po 10. splátce $\dots$

$$10^6(1+0,15)^{10}-s(1+0,15)^9-\dots-s(1+0,15)-s=0\ \text{(úvěr je splacen)}$$

Spočítáme s: $10^6(1+0,15)^{10}=s\left[(1+0,15)^9+\dots+(1+0,15)+1\right]$

$$10^6(1+0,15)^{10}=s\frac{(1+0,15)^{10}-1}{(1+0,15)-1}$$

$$10^6(1+0,15)^{10}=s\frac{(1+0,15)^{10}-1}{0,15}$$

$$s=\frac{10^6(1+0,15)^{10}\cdot 0,15}{(1+0,15)^{10}-1}=199\,252,10\ \text{Kč}$$

Celková částka zaplacená podnikatelem $10\cdot 199\,252,10=1\,992\,521\ \text{Kč}$

Zaplaceno na úrocích: $1\,992\,521-1\,000\,000=992\,521\ \text{Kč}$

Podnikatel zaplatil úvěr v deseti splátkách po 199252,10 Kč, na úrocích pak zaplatí 992 521 Kč.

Př. 3: Sestav pomocí řešení předchozích příkladů vzorec pro výpočet splátky *s* úvěru *D* Kč, na *n* let s roční úrokovou mírou *p* a úrokovacím obdobím 1 rok a jestliže má být úvěr splacen v *n* stejných ročních splátkách (první část po jednom roce od poskytnutí úvěru).

$$s=\frac{D\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot\frac{p}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1}$$

Pokud banka poskytne úvěr *D* Kč na *n* let s roční úrokovou mírou *p* a úrokovacím obdobím 1 rok a jestliže má být úvěr splacen v *n* stejných ročních splátkách (první část po jednom roce od poskytnutí úvěru) je výsledná výše splátky určena vztahem:

$$s = \frac{D\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}.$$

Př. 4: Pavel Novák si při koupi bytu půjčil na hypotéční úvěr 1000000 Kč. Banka úvěr poskytla na 25 let, s roční úrokovou mírou fixovanou na celou dobu splácení na 5,7% a měsíčním úrokovým obdobím. Úvěr je splácen formou měsíčních splátek, první po měsíci od jeho poskytnutí, poslední po uplynutí 25 let. Urči výšku jedné splátky.

Můžeme postupovat zcela stejně jako v předchozích příkladech, roční úrokovou míru musíme přepočítat na jeden měsíc.
Celkový počet splátek: $25 \cdot 12 = 300$
Měsíční úroková míra: $\frac{5,7}{12} = 0,475$
Po splacení celého úvěru: $10^6(1+0,00475)^{300} - s(1+0,00475)^{299} - \ldots - s(1+0,00475) - s = 0$ (úvěr je splacen)
Spočítáme s: $10^6(1+0,00475)^{300} = s\left[(1+0,00475)^{299} + \ldots + (1+0,00475) + 1\right]$

$$10^6(1+0,00475)^{300} = s \cdot \frac{(1+0,00475)^{300} - 1}{(1+0,00475) - 1}$$

$$10^6(1+0,00475)^{300} = s \cdot \frac{(1+0,00475)^{300} - 1}{0,00475}$$

$$s = \frac{10^6(1+0,00475)^{300} \cdot 0,00475}{(1+0,00475)^{300} - 1} = 6\,260,90 \text{ Kč}$$

Celková částka zaplacená p. Novákem: $300 \cdot 6\,260,90 = 1\,878\,270$ Kč.
Zaplaceno na úrocích: $1\,878\,270 - 1\,000\,000 = 878\,270$ Kč

Pedagogická poznámka: Výpočty hypoték mají jednu obrovskou výhodu, je možné si ihned kontrolovat výsledky na on-line kalkulačkách na internetu.

Př. 5: Urči, jak by se splátky Pavlovi hypotéky změnily, kdyby Pavel prodloužil dobu splatnosti na 30 let.

Počet splátek: $30 \cdot 12 = 360$
Dosadíme rovnou do konečného vzorce:

$$s = \frac{10^6(1+0,00475)^{360} \cdot 0,00475}{(1+0,00475)^{360} - 1} = 5\,804,00 \text{ Kč}$$

Pokud se prodlouží doba splácení hypotéky na 30 let, klesne měsíční splátka na 5 804 Kč.

Př. 6: Jednou z oblíbených forem nákupů na dluh je půjčka 10+1. Při této půjčce zaplatí kupující v obchodě pouze desetinu ceny a pak zaplatí deset dalších splátek ve stejné výši (zaplatí tedy postupně 110% běžné prodejní ceny). Porovnej výhodnost tohoto typu půjčky s klasickým bankovním úvěrem s roční úrokovou mírou 15% a deseti měsíčními splátkami s úrokovacím obdobím 1 měsíc. Předpokládej, že si spotřebitel chce pořídit novou LCD televizi v nákupní ceně 20000 Kč.

Splácení 10+1 $\Rightarrow$ kupující zaplatí 110% ceny, tedy 22000 Kč.

Půjčka: použijeme vzorec:

přepočítaná úroková míra na 12 měsíc … $\frac{15}{12}\%$

počet splátek 10

Dosadíme do vzorce: $s=\dfrac{20000\left(1+\frac{15}{12\cdot 100}\right)^{10}\cdot\frac{15}{12\cdot 100}}{\left(1+\frac{15}{12\cdot 100}\right)^{10}-1}=2140{,}10\ \text{Kč}\Rightarrow$ na splátkách by

Pokud by kupující půjčil na televizi v bance, zaplatil by každý měsíc 21401 Kč (celkem o 600 Kč méně než v případě půjčky 10+1), navíc by první splátku splácel až měsíc po nákupu.

Př. 7: Petáková:
strana 72/cvičení 67
strana 71/cvičení 68

Shrnutí: Splátky dluhu se dají mimo předpřipravené vztahy vypočíst i pomocí součtu geometrické řady.