8.3.3 Splátky dluhů

Předpoklady: 080302

Splácení dluhů
Méně příjemnou součástí finanční matematiky je výpočet splátek dluhu.

Př. 1: Banka poskytla podnikateli koncem roku 2019 úvěr ve výši 1 000 000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 6 % (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit ve třech stejných splátkách vždy na konci roku (tedy splátky budou na konci prosince 2020, 2021 a 2022). Urči výši jedné splátky. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Budeme postupně sledovat výši dluhu, který má podnikatel vůči bance.
Výši splátky označíme s

Konec roku 2019 … 10^6

Konec roku 2020, před splátkou … $10^6(1+0,06)$ (dluh se zvětšil, protože si banka připsala úroky z půjčky)

Konec roku 2020, po 1. splátce … $10^6(1+0,06)-s$

Konec roku 2021, před splátkou …
$\left[10^6(1+0,06)-s\right](1+0,06)=10^6(1+0,06)^2-s(1+0,06)$ (k nesplacené částce si banka připsala úroky z půjčky)

Konec roku 2021, po 2. splátce … $10^6(1+0,06)^2-s(1+0,06)-s$

Konec roku 2022, před splátkou …
$\left[10^6(1+0,06)^2-s(1+0,06)-s\right](1+0,06)=10^6(1+0,06)^3-s(1+0,06)^2-s(1+0,06)$
(k nesplacené částce si banka připsala úroky z půjčky)

Konec roku 2022, po 3. splátce …
$10^6(1+0,06)^3-s(1+0,06)^2-s(1+0,06)-s=0$ (úvěr je splacen)

Spočítáme s: $10^6(1+0,06)^3=s\left[(1+0,06)^2+(1+0,06)+1\right]$

Modře vyznačený výraz je součtem prvních tří členů geometrické posloupnosti $a_1=1$, $q=1+0,06$ $\Rightarrow$ výraz můžeme zjednodušit pomocí vzorce pro součet prvních n členů geometrické řady (v tomto případě to není velké zjednodušení, ale v případě většího množství splátek to jasné zjednodušení je)

$$10^6(1+0,06)^3=s\frac{(1+0,06)^3-1}{(1+0,06)-1}$$

$$10^6(1+0,06)^3=s\frac{(1+0,06)^3-1}{0,06}$$

$$s=\frac{10^6(1+0{,}06)^3\cdot 0{,}06}{(1+0{,}06)^3-1}=374\,109{,}80 \text{ Kč}$$

Celková částka zaplacená podnikatelem $3\cdot 374\,109{,}8=1\,122\,329{,}40$ Kč

Zaplaceno na úrocích: $1\,122\,329{,}40-1\,000\,000=122\,329{,}40$ Kč

Podnikatel zaplatil úvěr ve třech splátkách po 374 110 Kč, na úrocích pak zaplatí 122 330 Kč.

Dodatek: Všímavý čtenář si jistě všiml, že úroková míra je u půjčky znatelně vyšší než spoření. Důvod je jednoduchý rozdíl mezi úrokovou mírou u spoření a půjček je zdrojem (býval dokonce hlavním) zisku banky, hradí se z něj provozní výdaje a zohledňuje také riziko nesplacení půjčky. Snahou bank tedy je poskytovat spoření za co nejnižší úroky a půjčky za úroky co nejvyšší.

Př. 2: Banka poskytla podnikateli koncem roku 2019 úvěr na 10 let ve výši 5 000 000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 4,9 % (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit v deseti stejných splátkách vždy na konci roku. Urči výši jedné splátky. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Můžeme odvozovat stejně jako v předchozím příkladu:

Konec roku 2019, po 10. splátce …

$$5\cdot 10^6(1+0{,}049)^{10}-s(1+0{,}049)^9-\ldots-s(1+0{,}049)-s=0 \text{ (úvěr je splacen)}$$

Spočítáme s: $5\cdot 10^6(1+0{,}049)^{10}=s\left[(1+0{,}049)^9+\ldots+(1+0{,}049)+1\right]$

$$5\cdot 10^6(1+0{,}049)^{10}=s\frac{(1+0{,}049)^{10}-1}{(1+0{,}049)-1}$$

$$5\cdot 10^6(1+0{,}049)^{10}=s\frac{(1+0{,}049)^{10}-1}{0{,}049}$$

$$s=\frac{5\cdot 10^6(1+0{,}049)^{10}\cdot 0{,}049}{(1+0{,}049)^{10}-1}=644\,382{,}10 \text{ Kč}$$

Celková částka zaplacená podnikatelem $10\cdot 644\,382{,}10=6\,443\,820$ Kč

Zaplaceno na úrocích: $6\,443\,820-5\,000\,000=1\,443\,820$ Kč

Podnikatel zaplatil úvěr v deseti splátkách po 644 382,10 Kč, na úrocích pak zaplatí 1 443 820 Kč.

Př. 3: Sestav pomocí řešení předchozích příkladů vzorec pro výpočet splátky s úvěru D Kč, na n let s roční úrokovou mírou p a úrokovacím obdobím 1 rok a jestliže má být úvěr splacen v n stejných ročních splátkách (první část po jednom roce od poskytnutí úvěru).

$$s=\frac{D\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot\frac{p}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1}$$

Pokud banka poskytne úvěr D Kč na n let s roční úrokovou mírou p a úrokovacím obdobím 1 rok a jestliže má být úvěr splacen v n stejných ročních splátkách (první část po jednom roce od poskytnutí úvěru) je výsledná výše splátky určena vztahem:

$$s=\frac{D\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot\frac{p}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1}.$$

Př. 4: Pavel Novák si při koupi bytu půjčil na hypoteční úvěr 2 500 000 Kč. Banka úvěr poskytla na 25 let, s roční úrokovou mírou fixovanou na celou dobu splácení na 2,69 % a měsíčním úrokovým obdobím. Úvěr je splácen formou měsíčních splátek, první po měsíci od jeho poskytnutí, poslední po uplynutí 25 let. Urči výšku jedné splátky.

Můžeme postupovat zcela stejně jako v předchozích příkladech, roční úrokovou míru musíme přepočítat na jeden měsíc.

Celkový počet splátek: $25\cdot12=300$

Měsíční úroková míra: $\frac{2,69}{12}\doteq0,224$

Po splacení celého úvěru:

$2,5\cdot10^6(1+0,00224)^{300}-s(1+0,00224)^{299}-\ldots-s(1+0,00224)-s=0$ (úvěr je splacen)

Spočítáme s: $2,5\cdot10^6(1+0,00224)^{300}=s\left[(1+0,00224)^{299}+\ldots+(1+0,00224)+1\right]$

$$2,5\cdot10^6(1+0,00224)^{300}=s\cdot\frac{(1+0,00224)^{300}-1}{(1+0,00224)-1}$$

$$2,5\cdot10^6(1+0,00224)^{300}=s\cdot\frac{(1+0,00224)^{300}-1}{0,00224}$$

$$s=\frac{10^6\left(1+\frac{2,69}{12\cdot100}\right)^{300}\cdot\frac{2,69}{12\cdot100}}{\left(1+\frac{2,69}{12\cdot100}\right)^{300}-1}=11\,456,10\text{ Kč}$$ (místo zaokrouhleného čísla $0,00224$ dosadíme vztah $\frac{2,69}{12\cdot100}$)

Celková částka zaplacená p. Novákem: $300\cdot11\,456,10=3\,436\,830$ Kč.

Zaplaceno na úrocích: $3\,436\,830-2\,500\,000=936\,830$ Kč.

Pedagogická poznámka: Výpočty hypoték mají jednu obrovskou výhodu, je možné si ihned kontrolovat výsledky na on-line kalkulačkách na internetu.

Př. 5: Urči, jak by se splátky Pavlovy hypotéky změnily, kdyby Pavel prodloužil dobu splatnosti na 30 let.

Počet splátek: $30\cdot12=360$

Dosadíme rovnou do konečného vzorce:

$$s=\frac{10^6\left(1+\frac{2,69}{12\cdot 100}\right)^{360}\cdot\frac{2,69}{12\cdot 100}}{\left(1+\frac{2,69}{12\cdot 100}\right)^{360}-1}=10\,126,80\ \text{Kč}$$

Pokud se prodlouží doba splácení hypotéky na 30 let, klesne měsíční splátka na 10 126,8 Kč.

Př. 6: Jednou z oblíbených forem nákupů na dluh je půjčka 10+1. Při této půjčce zaplatí kupující v obchodě pouze desetinu ceny a pak zaplatí deset dalších splátek ve stejné výši (zaplatí tedy postupně 110 % běžné prodejní ceny). Porovnej výhodnost tohoto typu půjčky s klasickým bankovním úvěrem s roční úrokovou mírou 6,9 % a deseti měsíčními splátkami s úrokovacím obdobím 1 měsíc. Předpokládej, že si spotřebitel chce pořídit novou QLED televizi v nákupní ceně 21 999 Kč.

Splácení 10+1 $\Rightarrow$ kupující zaplatí 110 % ceny, tedy: $21999\cdot 1,1=24\,198,9$ Kč.

Půjčka: použijeme vzorec:

přepočítaná úroková míra na 12 měsíců … $\frac{6,9}{12}\,\%$

počet splátek: 10

Dosadíme do vzorce: $s=\dfrac{20000\left(1+\frac{6,9}{12\cdot 100}\right)^{10}\cdot\frac{6,9}{12\cdot 100}}{\left(1+\frac{6,9}{12\cdot 100}\right)^{10}-1}=2270,10\ \text{Kč}$ $\Rightarrow$ pokud by si kupující půjčil na televizi v bance, zaplatil by celkem 22 701 Kč (celkem o 1 497,9 Kč méně než v případě půjčky 10+1), navíc by první splátku splácel až měsíc po nákupu.

Př. 7: Petáková:
strana 72/cvičení 67
strana 71/cvičení 68

Shrnutí: Splátky dluhu se dají mimo předpřipravené vztahy vypočíst i pomocí součtu geometrické řady.