

8.3.2 Limity některých posloupností

Předpoklady: 8301

Pedagogická poznámka: Tuto a tři následující hodiny je možné probrat za dvě vyučovací hodiny. V této hodině je možné vynechat dokazování limit v příkladu 3.

Opakování z minulé hodiny:

Hodnoty posloupnosti $\left(\frac{8}{2^n} + 2\right)_{n=1}^{\infty}$ se pro n blížící se k nekonečnu blíží k 2 a to tak, že mezi posloupností a číslem 2 „neexistuje žádná mezera“ \Rightarrow říkáme, že číslo 2 je limitou posloupnosti $\left(\frac{8}{2^n} + 2\right)_{n=1}^{\infty}$ pro n blížící se k nekonečnu (píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{2^n} + 2\right) = 2$).

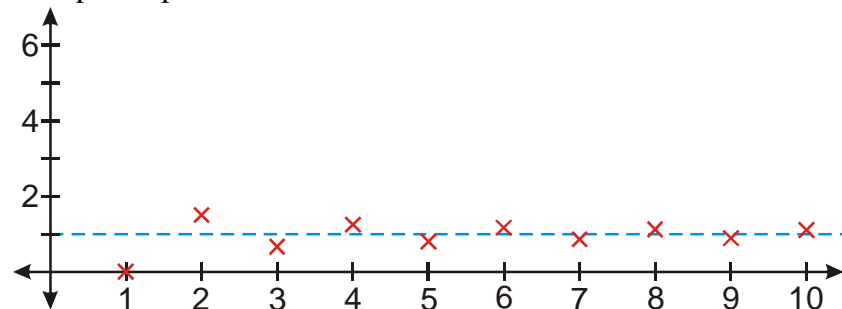
Exaktní zachycení předchozího odstavce obsahuje definice limity.

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní**, právě když existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Číslo a říkáme **limita posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Nyní si rozebereme posloupnost $\left(\frac{[-1]^n}{n} + 1\right)_{n=1}^{\infty}$.

Prvních deset členů posloupnosti: $0; 1\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 1\frac{1}{4}; \frac{4}{5}; 1\frac{1}{6}; \frac{6}{7}; 1\frac{1}{8}$.

Graf posloupnosti:



Vypadá to, že limitou této posloupnosti je číslo 1. Hodnoty se k němu blíží z obou stran.

Zkusíme vlastnost $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{[-1]^n}{n} + 1\right) = 1$ dokázat z definice v modrém rámečku.

Zvolíme $\varepsilon = 0,1$. Hledáme takové n_0 , aby platilo, že pro $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$.

Dosadíme: $\left|\frac{[-1]^n}{n} + 1 - 1\right| < 0,1$.

$$\left|\frac{[-1]^n}{n}\right| < 0,1 \quad \text{Platí (pro } n \in \mathbb{N}\text{): } \left|\frac{[-1]^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}.$$

$$\frac{1}{n} < 0,1$$

$10 < n \Rightarrow$ pro a_{11} a všechna a_n za ním platí: $|a_n - 1| < 0,1$.

Zkusíme to obecně pro $\varepsilon > 0$.

$$\left| \frac{[-1]^n}{n} + 1 - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{[-1]^n}{n} \right| < \varepsilon \quad \text{Platí (pro } n \in N): \left| \frac{[-1]^n}{n} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}.$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow$ protože $\varepsilon > 0$, určitě takové a_n najdeme \Rightarrow posloupnost $\left(\frac{[-1]^n}{n} + 1 \right)_{n=1}^{\infty}$ má

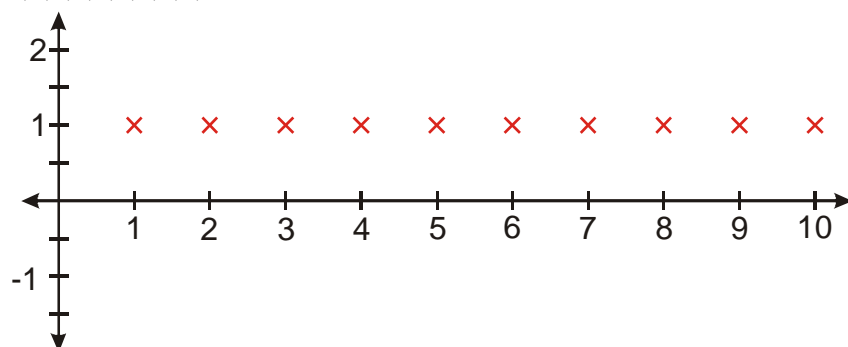
limitu 1.

Př. 1: Pro zadané posloupnosti napiš prvních deset členů, načrtni jejich graf a odhadni, zda mají limitu.

a) $(1)_{n=1}^{\infty}$ b) $([-2]^n)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left([-1]^n + \frac{1}{n} \right)_{n=1}^{\infty}$ d) $\left(\frac{2n}{n+1} \right)_{n=1}^{\infty}$

a) $(1)_{n=1}^{\infty}$

1;1;1;1;1;1;1;1;1;1



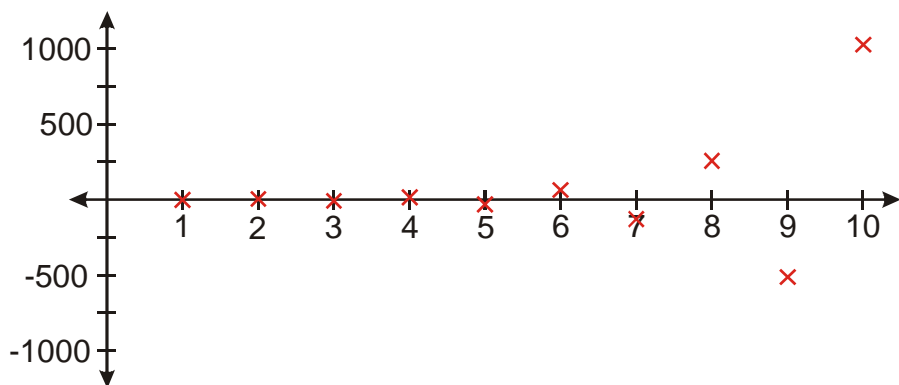
Na první pohled se zdá, že posloupnost se „k ničemu neblíží“ a neměla by tedy mít limitu.

Pokud však použijme přímo definici limity, je zřejmé, že posloupnost má limitu rovnou jedné, protože pro libovolně široký pás kolem 1 jsou všechny členy posloupnosti ihned uvnitř a splňují tak podmínku pro existenci limity.

\Rightarrow Zřejmě platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1) = 1$.

b) $([-2]^n)_{n=1}^{\infty}$

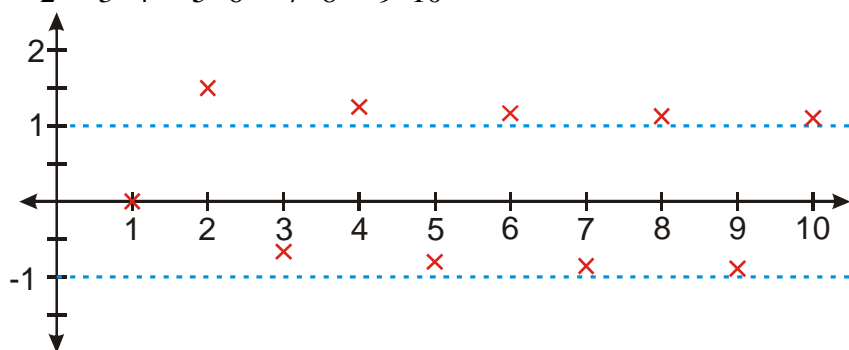
-2; 4; -8; 16; -32; 64; -128; 256; -512; 1024



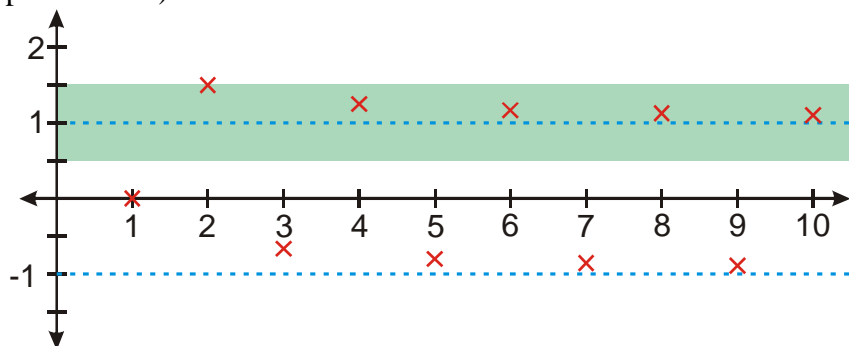
Jak z hodnot, tak z grafu je zřejmé, že posloupnost nemá žádnou limitu.

c) $\left([-1]^n + \frac{1}{n} \right)_{n=1}^{\infty}$

$0; \frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{5}{4}; -\frac{4}{5}; \frac{7}{6}; -\frac{6}{7}; \frac{9}{8}; -\frac{8}{9}; \frac{11}{10}$

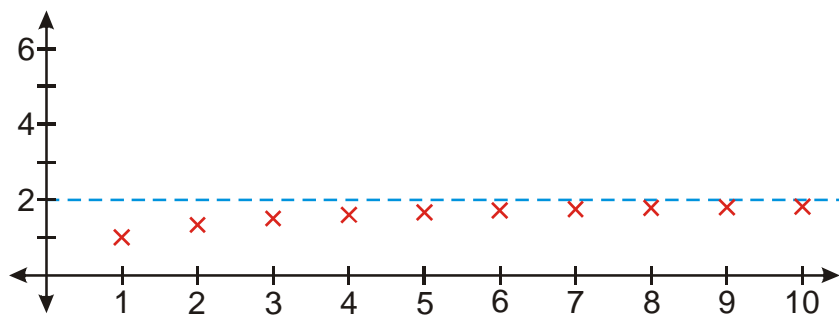


Z grafu se zdá, že posloupnost má dvě limity 1 a -1 , ale pozor!!! Kdyby posloupnost měla limitu 1, musel by například pro pás o poloměru 0,5 existovat člen a_n takový, že všechny členy posloupnosti za ním by byly uvnitř pásu, ale to se kvůli tomu, že polovina členů posloupnosti se snaží přiblížit k -1 nestane, protože tyto členy se do pásu nedostanou. \Rightarrow Posloupnost nemá žádnou limitu (u limit posloupností nejde sedět jedním zadkem na dvou posvíceních).



d) $\left(\frac{2n}{n+1} \right)_{n=1}^{\infty}$

$1; \frac{4}{3}; \frac{3}{2}; \frac{8}{5}; \frac{5}{3}; \frac{12}{7}; \frac{7}{4}; \frac{16}{9}; \frac{9}{5}; \frac{20}{11}$



Z grafu se zdá, že posloupnost má limitu 2.

Z úvahy: výraz $\frac{2n}{n+1}$, se blíží výrazu $\frac{2n}{n} = 2$.

\Rightarrow Zřejmě platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.

Pedagogická poznámka: Není možné čekat až budou mít všichni bod d). Stačí když se jim podaří dokončit bod c).

Předchozí příklady dobře dokumentují dvě další věty o limitách posloupností.

- **Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.**
- **Každá konvergentní posloupnost je omezená.**

Př. 2: Najdi v předchozím příkladu bod, který dokumentuje každou z předchozích dvou vět, a zkus najít hlavní myšlenku důkazů obou vět.

a) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Větu dokumentuje bod c), ačkoliv se z grafu zdá, že posloupnost má dvě limity, je v příkladu zdůvodněno, proč posloupnost nemá ani jedinou (například do pásu o poloměru 0,5 existovat se nevejde polovina členů posloupnosti, které se snaží přiblížit hodnotě -1). \Rightarrow

Myšlenka důkazu: Kdyby posloupnost měla dvě různé limity stačilo by kolem jedné z nich udělat pás, který má menší poloměr než je vzdálenost těchto limit, a členy, které se blíží k druhé limitě, budou mimo něj.

b) Každá konvergentní posloupnost je omezená.

S větou souvisí bod b), kde máme neomezenou posloupnost a je ihned vidět, že nemůže mít limitu. \Rightarrow

Myšlenka důkazu: Posloupnost je neomezená, právě když se pro n blížící se nekonečnu blíží členy posloupnosti také nekonečnu (nebo mínus nekonečnu = roste nebo klesá nade všechny meze), pak se ale nemohou blížit k nějakému konkrétnímu číslu (limitě).

Př. 3: Odhadni limity následujících posloupností a poté jejich existenci dokaž použitím definice limity.

a) $(q^n)_{n=1}^{\infty}, |q| < 1$

b) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $(3)_{n=1}^{\infty}$

d) $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

a) $(q^n)_{n=1}^{\infty}, |q| < 1$

Odhadujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0 , aby platilo, že pro $n \geq n_0$,

$|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce.

$$|q^n - 0| < \varepsilon$$

$|q^n| < \varepsilon$ zlogaritmuje, $\log x$ je rostoucí funkce \Rightarrow neobracíme nerovnost.

$$\log |q^n| < \log \varepsilon$$

$n \log |q| < \log \varepsilon \quad /: \log |q| \quad |q| < 1 \Rightarrow \log |q| < 0 \Rightarrow$ obracíme znaménko nerovnosti.

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|} \Rightarrow \text{pro každé } \varepsilon \text{ dokážeme dopočítat } n \Rightarrow \text{podmínka je splněna} \Rightarrow \text{platí:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0; \quad |q| < 1.$$

Jak by to vypadalo, kdyby neplatilo $|q| < 1$?

$|q| > 1 \Rightarrow \log |q| > 0 \Rightarrow$ neobracíme znaménko nerovnosti.

$$n < \frac{\log \varepsilon}{\log |q|} \Rightarrow \text{přesně opačný výsledek než potřebujeme, od určitého } n \text{ budou všechny členy}$$

posloupnosti mimo vyznačený pás o šířce $\varepsilon \Rightarrow$ pro $|q| > 1$ posloupnost není konvergentní.

b) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Odhadujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0 , aby platilo, že pro $n \geq n_0$,

$|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce.

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \quad n \text{ je přirozené číslo} \Rightarrow \text{platí } \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad / \cdot \frac{n}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n \quad \Rightarrow \text{máme určené } n \text{ pro každé } \varepsilon \Rightarrow \text{podmínka je splněna} \Rightarrow \text{platí: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

c) $(3)_{n=1}^{\infty}$

Odhadujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$.

Chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0 , aby platilo, že pro $n \geq n_0$,

$|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce.

$$|3 - 3| < \varepsilon$$

$|0| < \varepsilon \Rightarrow$ Pro libovolné ε je podmínka splněna ihned \Rightarrow jako a_n můžeme brát a_1 a

jako n jedničku \Rightarrow podmínka je splněna \Rightarrow platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$.

$$d) \left(\frac{1}{2^n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

Odhadujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0 , aby platilo, že pro $n \geq n_0$,

$|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce.

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{2^n} \right| < \varepsilon \quad 2^n \text{ je vždy kladné číslo} \Rightarrow \text{platí } \left| \frac{1}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}.$$

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad / \cdot \frac{2^n}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < 2^n \quad \text{zlogaritmuje, } \log x \text{ je rostoucí funkce} \Rightarrow \text{neobracíme nerovnost.}$$

$$\log \frac{1}{\varepsilon} < \log 2^n$$

$$\log \frac{1}{\varepsilon} < n \cdot \log 2 \quad / : \log 2 \quad \log 2 > 0 \Rightarrow \text{znaménko se nemění.}$$

$$\log \frac{1}{\varepsilon} < n \cdot \log 2 \quad / : \log 2$$

$$\frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2} < n \quad \Rightarrow \text{Pro každé } \varepsilon \text{ dokážeme dopočítat } n \Rightarrow \text{podmínka je splněna} \Rightarrow \text{platí:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Pedagogická poznámka: Při kontrole je na místě zmínit, jak by situace vypadala, kdyby neplatilo $|q| < 1$. Ani v jednom příkladu se žáci jinak nesečkají s tím, jak to vypadá, když posloupnost konvergentní není.

Poslední výsledek je jasný a důležitý zároveň. Zformulujeme si ho do věty a podle ní zformulujeme ještě jednu větu:

- **Geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí $|q| < 1$ je konvergentní a její limita je 0.**
- **Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro jejíž kvocient q platí $|q| < 1$ je konvergentní a její limita je 0.**

Shrnutí: Dosazením do definice můžeme dokázat existenci limity.