8.4.3 Výpočty limit

Předpoklady: 080401, 080402

Z minulé hodiny víme:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}3=3$; $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$; $|q|<1$.

Zřejmě také platí: $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$, $c\in R$ (limita konstantní posloupnosti je rovna jejím členům).

Spočítat každou z těch limit je docela dřina.

Jak korektně spočítat $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+3n}{n}$?

Zdá se, že platí: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+3n}{n}=3$, ale je to jenom náš odhad, který zatím musíme dokázat z definice.

$\Rightarrow$ Potřebujeme věty pro výpočet limit posloupností, které by nás zbavily nutnosti neustálého dokazování.

Jestliže posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ pak je konvergentní i posloupnost:

$(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$	a platí	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a+b$
$(a_n-b_n)_{n=1}^{\infty}$	a platí	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a-b$
$(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$	a platí	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\cdot b$

Jestliže posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ pak je konvergentní i posloupnost $(c\cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde c je libovolné reálné číslo a platí $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c\cdot a$

Jestliže posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ a přitom $b\neq0$ a $b_n\neq0$ pro všechna $n\in N$ pak je konvergentní i posloupnost $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b}$

Teď už umíme vypočítat limity mnoha dalších posloupností:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2\cdot0\cdot0=0$.

Př. 1: Vypočti limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{4^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+3n}{n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{2n^2}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{4^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{\left(2^n\right)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=\pi\cdot 0\cdot 0=0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+3n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}3=2\cdot 0+3=3$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{2n^2}=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to\infty}1-2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(1-2\cdot 0+3\cdot 0\cdot 0\right)=\frac{1}{2}$

Ne vždy je možné zlomek snadno rozdělit: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-2n+3}$?

Pomůže nám vhodné rozšíření zlomku (na nejvyšší mocninu):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}-\frac{2n}{n^2}+\frac{3}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{2}{1-0+0}=2$$

Př. 2: Vypočti limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+2}{3n^2+2n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^3-2n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+3}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+2}{3n^2+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^3-2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^3}+\frac{3n}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}-\frac{2n}{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}}=\frac{0+0}{1-0}=0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n}{2^n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{2^n}{2^n}}{\frac{2^n}{2^n}+\frac{3}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot 1}{1+\frac{3}{2^n}}=\frac{2}{1+0}=2$

Př. 3: Rozhodni, kdy je aritmetická posloupnost $a_1;d$ konvergentní.

Vzorec pro n-tý člen: $\left[a_1+d\left(n-1\right)\right]_{n=1}^{\infty}\Rightarrow$

- pokud je $d\neq 0$, hodnoty posloupnosti se neustále zvětšují nebo zmenšují o stále stejné číslo $\Rightarrow$ posloupnost je divergentní,

- pokud $d=0$, všechny členy posloupnosti se rovnají a_1 $\Rightarrow$ posloupnost je konvergentní a platí $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1$.

Př. 4: Rozhodni, kdy je geometrická posloupnost $a_1; q$ konvergentní.

Vzorec pro n-tý člen: $\left[a_1 \cdot q^{n-1}\right]_{n=1}^{\infty}$ $\Rightarrow$ dvě možnosti podle hodnoty a_1:

- $a_1 = 0$ $\Rightarrow$ všechny členy posloupnosti se rovnají nule (na q nezáleží) $\Rightarrow$ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
- $a_1 \neq 0$ $\Rightarrow$ záleží na q:
  - pokud je $|q|<1$, absolutní hodnota členů posloupnosti se neustále zmenšuje $\Rightarrow$ členy posloupnosti se blíží 0 $\Rightarrow$ posloupnost je konvergentní a platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
  - pokud platí $q=1$, všechny členy posloupnosti se rovnají a_1 $\Rightarrow$ posloupnost je konvergentní a platí $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1$,
  - pokud platí $q=-1$, členy posloupnosti přeskakují mezi hodnotami a_1 a $-a_1$ $\Rightarrow$ posloupnost je divergentní,
  - pokud platí $|q|>1$ absolutní hodnota členů posloupnosti se neustále zvětšuje $\Rightarrow$ posloupnost je divergentní.

Př. 5: Petáková:
strana 67/cvičení 8

Shrnutí: S limitami posloupností můžeme počítat podobně jako s čísly.