8.3.4 Využití limit posloupností

Předpoklady: 8303

Pedagogická poznámka: Není samozřejmě možné odučit obsah hodiny s běžnou třídou za 45 minut. V tomto případě jde spíše o soupis možných úkolů pro různě disponované žáky ve třídě. Při práci s většinou třídy projdeme úvodní část hodny společně s projektorem, chvíli samostatně pracujeme na příkladu 6 a po jeho poměrně časné kontrole žáci samostatně pracují na zbytku hodiny s tím, že bod 8 c) je pouze bonus pro zájemce.

Př. 1: Rozhodni zda platí věta: „Je-li posloupnost omezená, pak je konvergentní.“ Pokud věta neplatí, najdi protipříklad. Pokud věta platí, zkus zdůvodnit proč.

Věta určitě neplatí. Například posloupnost $\left([-1]^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, ale není konvergentní (hodnoty neustále skákají mezi 1 a –1).

Př. 2: Rozhodni zda platí věta: „Je-li posloupnost neklesající (nerostoucí), pak je konvergentní.“ Pokud věta neplatí, najdi protipříklad. Pokud věta platí, zkus zdůvodnit proč.

Věta určitě neplatí. Například posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí (a tedy neklesající), ale není konvergentní (hodnoty neustále rostou a neblíží se k žádnému reálnému číslu).

Př. 3: Zkus na základě předchozích dvou příkladů navrhnout, které vlastnosti by posloupnost měla najednou splňovat, aby byla konvergentní.

Vyjdeme z předchozích dvou příkladů:

- posloupnost $\left([-1]^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, ale není konvergentní, protože hodnoty neustále skákají mezi 1 a –1. Kdyby se hodnoty omezené posloupnosti měnily „jedním směrem“ (například neustále rostly), posloupnost by zřejmě byla konvergentní. Hodnoty by nemohly neustále růst (kvůli omezenosti) a zároveň by se musely zvětšovat $\Rightarrow$ posloupnosti by nezbylo nic jiného než se zespoda blížit k nějakému číslu.
- posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, ale není konvergentní, protože hodnoty neustále rostou a neblíží se k žádnému reálnému číslu. Kdybychom neklesající posloupnost omezili shora, posloupnost by zřejmě byla konvergentní. Hodnoty by neustále rostly a zároveň by nemohly překročit určitou hodnotu $\Rightarrow$ posloupnosti by nezbylo nic jiného než se zespoda blížit k nějakému číslu.

Pokud bude posloupnost omezená a neklesající (nerostoucí, rostoucí, klesající), bude konvergentní.

Je-li posloupnost neklesající (rostoucí) a přitom shora omezená, pak je konvergentní.

Je-li posloupnost nerostoucí (klesající) a přitom zdola omezená, pak je konvergentní.

Vzpomínka z prvního ročníku: Jak určíme hodnotu $\sqrt{2}$?
$\sqrt{2}$ není možné napsat konečným desetinným rozvojem, ale můžeme její hodnotu dopočítat umocňováním libovolný počet desetinných míst.

$$1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad 1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1,4^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = 1,5^2 \quad \Rightarrow \quad 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$
$$1,41^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = 1,42^2 \quad \Rightarrow \quad 1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$
$$1,414^2 = 1,999396 < 2 < 2,002225 = 1,415^2 \quad \Rightarrow \quad 1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$
$$1,4142^2 = 1,99996164 < 2 < 2,00024449 = 1,4143^2 \quad \Rightarrow \quad 1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$
$$1,41421^2 = 1.9999899241 < 2 < 2.0000182084 = 1,41422^2 \quad \Rightarrow \quad 1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$$

Takto můžeme za dlouhých zimních večerů pokračovat libovolně dlouho.

V pravém sloupci jsme získali dvě posloupnosti:

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: $1; 1,4; 1,41; 1,414; ...$
- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$: $2; 1,5; 1,42; 1,415; ...$

Př. 4: Urči vlastnosti posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Co z těchto vlastností vyplývá?

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

- rostoucí $\Rightarrow$ neklesající
- shora omezená ($a_n < \sqrt{2}$)

$\Rightarrow$ je konvergentní.

Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$:

- klesající $\Rightarrow$ nerostoucí
- zdola omezená ($b_n > \sqrt{2}$)

$\Rightarrow$ je konvergentní.

Hodnoty posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se zdola blíží k $\sqrt{2}$, hodnoty posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ se k $\sqrt{2}$ blíží shora $\Rightarrow$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}$.

Proč to tak řešíme?
V matematické teorii máme dobře zavedená přirozená, celá i racionální čísla. Potřebujeme si však ujasnit, co jsou vlastně zač čísla iracionální. Ukázalo se, že k tomu dobře mohou posloužit limity posloupností a na každé iracionální (ale i racionální, tedy obecně reálné číslo) se můžeme dívat jako na limitu dvou posloupností analogických těm, které jsme našli pro $\sqrt{2}$.

Tvrzení $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}$ jsme zatím nedokázali. V důkazu se musíme ujistit, že hodnoty nekonečně mnoha členů obou posloupností padnou do libovolně tenkého pásu okolo $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ potřebujeme popsat, že hodnoty obou posloupností se přibližují k sobě i k $\sqrt{2}$.

V tabulce je vidět, že v každém dalším řádku se odhad zpřesní o jedno desetinné místo $\Rightarrow$ rozdíl $b_n - a_n$ se v každém kroku zmenší desetkrát $\Rightarrow$ $b_n - a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$.

Dokazujeme limitu pro $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Vyjdeme z $b_n - a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, nahradíme b_n nerovností $b_n > \sqrt{2}$ (dvě mouchy jednou ranou, zbavíme se b_n a objeví se $\sqrt{2}$)

$$a_n + \frac{1}{10^{n-1}} = b_n > \sqrt{2}$$

$$a_n + \frac{1}{10^{n-1}} > \sqrt{2} \qquad / -a_n$$

$$\frac{1}{10^{n-1}} > \sqrt{2} - a_n$$

Rozdíl $\sqrt{2} - a_n$ je určitě kladný $\Rightarrow$ můžeme přidat absolutní hodnotu

$$\left|\sqrt{2} - a_n\right| = \left|a_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{10^{n-1}}$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ určitě existuje $n_0 \in N$ takové, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo

$$\frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\left|a_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$$

Př. 5: Doplň do druhého sloupce důkaz pro posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Dokazujeme limitu pro $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Vyjdeme z $b_n - a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, nahradíme b_n nerovností $b_n > \sqrt{2}$ (dvě mouchy jednou ranou, zbavíme se b_n a objeví se $\sqrt{2}$)

$$a_n + \frac{1}{10^{n-1}} = b_n > \sqrt{2}$$

Dokazujeme limitu pro $(b_n)_{n=1}^{\infty}$

Vyjdeme z $b_n - a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, nahradíme a_n nerovností $a_n < \sqrt{2}$ (dvě mouchy jednou ranou, zbavíme se a_n a objeví se $\sqrt{2}$)

$$b_n - \frac{1}{10^{n-1}} = a_n < \sqrt{2}$$

$a_n + \frac{1}{10^{n-1}} > \sqrt{2} \qquad / -a_n$

$\frac{1}{10^{n-1}} > \sqrt{2} - a_n$

Rozdíl $\sqrt{2} - a_n$ je určitě kladný $\Rightarrow$ můžeme přidat absolutní hodnotu

$\left|\sqrt{2} - a_n\right| = \left|a_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{10^{n-1}}$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ určitě existuje $n_0 \in N$ takové, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo

$\frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow$

$\left|a_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$

$b_n - \frac{1}{10^{n-1}} < \sqrt{2} \qquad / -\sqrt{2} + \frac{1}{10^{n-1}}$

$b_n - \sqrt{2} < \frac{1}{10^{n-1}}$

Rozdíl $b_n - \sqrt{2}$ je určitě kladný $\Rightarrow$ můžeme přidat absolutní hodnotu

$\left|b_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{10^{n-1}}$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ určitě existuje $n_0 \in N$ takové, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo

$\frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow$

$\left|b_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}$

Př. 6: Proč je třeba v předchozích úvahách pracovat s tím, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí a není možné používat názornější označení posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jako rostoucí a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jako klesající? Argumentuj pomocí hodnoty $\sqrt{2}$ na 25 desetinných míst $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887$.

Při zpřesňování výsledků se může stát, že se hodnota posloupnosti a_n nebo b_n nezmění. Například při zpřesnění z 12 na 13 desetinných míst se odhady změní takto:

- posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: z $\sqrt{2} = 1{,}414213562373$ na $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730$
- posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$: z $\sqrt{2} = 1{,}414213562374$ na $\sqrt{2} = 1{,}4142135623731$

$\Rightarrow$ hodnota posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nezměnila $\Rightarrow$ hodnota neklesající posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nemění vždy, když desetinný rozvoj obsahuje nulu.

Podobně hned v následujícím kroku:

- posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: z $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730$ na $\sqrt{2} = 1{,}41421356237309$
- posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$: z $\sqrt{2} = 1{,}4142135623731$ na $\sqrt{2} = 1{,}41421356237310$

$\Rightarrow$ hodnota posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ se nezměnila $\Rightarrow$ hodnota nerostoucí posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ se nemění vždy, když desetinný rozvoj obsahuje devítku.

Př. 7: Jedna z nejdůležitějších matematických konstant je dána jako limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Zjisti, o kterou matematickou konstantu jde.

Zkusíme spočítat některý vzdálenější člen posloupnosti:

- $n=100: \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2,7048 \Rightarrow$ zřejmě jde o číslo *e*,
- $n=1000: \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}=2,7169 \Rightarrow$ opravdu to bude číslo *e*.

Přesnější hodnota čísla: $e=2,7182818284590452353$.

Př. 8: Daleko rychleji než postupem z úvodu hodiny je možné získat hodnotu odmocniny z kladného čísla *a* takto:
Nejprve zvolíme kladné číslo x_1 jehož druhá mocnina je větší než *a*. Pak platí:
$\frac{a}{x_1}<\sqrt{a}<x_1$. Odmocnina z *a* je pak limita rekurentně dané posloupnosti
$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}+x_n\right)$.
a) Urči tolik prvních členů posloupnosti, abys určil hodnotu $\sqrt{2}$ s přesností na pět desetinných míst.
b) Vypočti pomocí tohoto algoritmu $\sqrt{7}$ a $\sqrt{0,3}$ na tři desetinná místa.
c) Dokaž platnost tohoto postupu (předpokládej, že posloupnost $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, poté využij rovnost $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=c$).

a) Urči tolik prvních členů posloupnosti, abys určil hodnotu $\sqrt{2}$ s přesností na pět desetinných míst.
Přibližná hodnota $\sqrt{2}$ na šest desetinných míst: $\sqrt{2}\doteq 1,414214$.
Jako x_1 zvolíme číslo 2 ($2^2>2$ a tedy $x_1^2>a$)
Určujeme další členy posloupnosti vzorcem $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}+x_n\right)$:

- $x_2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2}+2\right)=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}=1,5$,
- $x_3=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{17}{6}\right)=\frac{17}{12}\doteq 1,41666$
- $x_4=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\frac{17}{12}}+\frac{17}{12}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{24}{17}+\frac{17}{12}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{577}{204}\right)=\frac{577}{408}\doteq 1,414216 \Rightarrow$ vypočtená hodnota se shoduje na prvních pěti desetinných místech.

b) Vypočti pomocí tohoto algoritmu $\sqrt{7}$ a $\sqrt{0,3}$ na tři desetinná místa.
Přibližná hodnota $\sqrt{7}$ na šest desetinných míst: $\sqrt{7}\doteq 2,645751$.
Jako x_1 zvolíme číslo 3 ($3^2>7$ a tedy $x_1^2>a$)

Určujeme další členy posloupnosti vzorcem $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}+x_n\right)$:

- $x_2=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}+3\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}+\frac{9}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}=\frac{8}{3}=2,\overline{6}$,
- $x_3=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{\frac{8}{3}}+\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{21}{8}+\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{63}{24}+\frac{64}{24}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{127}{24}=\frac{127}{48}\doteq 2,64583 \Rightarrow$ vypočtená hodnota se shoduje na prvních třech desetinných místech.

Přibližná hodnota $\sqrt{0,3}$ na šest desetinných míst: $\sqrt{0,3}\doteq 0,547723$.
Jako x_1 zvolíme číslo 0,6 ($0,6^2=0,36>0,3$ a tedy $x_1^2>a$)
Určujeme další členy posloupnosti vzorcem $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}+x_n\right)$:

- $x_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}}+\frac{6}{10}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{6}+\frac{6}{10}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{6}{10}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{10}+\frac{6}{10}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{10}=\frac{11}{20}=0,55$,
- $x_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{3}{10}}{\frac{11}{20}}+\frac{11}{20}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{6}{11}+\frac{11}{20}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{120}{220}+\frac{121}{220}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{241}{220}\doteq 0,54772727 \Rightarrow$ vypočtená hodnota se shoduje na prvních pěti desetinných místech (tedy více než požadovaných třech).

c) Dokaž platnost tohoto postupu (předpokládej, že posloupnost $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, poté využij rovnost $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=c$).

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}+x_n\right)$

Využijeme $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$: $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}+x_n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+c\right)=c$

Upravujeme jen poslední rovnost: $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+c\right)=c \quad /\cdot 2$

$\frac{a}{c}+c=2c \quad /\cdot c$

$a+c^2=2c^2 \quad /-c^2$

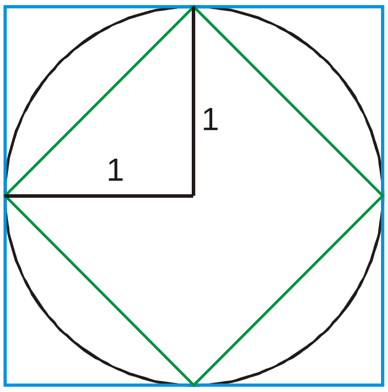
$c^2=a \quad /\sqrt{\ }$

$c=\sqrt{a}$

Př. 9: Hodnota čísla π byla původně určována pomocí vztahu mezi obvodem kružnice a obvodem pravidelných *n*-úhelníků, které jsou této kružnici opsány a vepsány.

a) Odhadni velikost čísla π pomocí čtyřúhelníků.
b) Najdi vzorce pro n-tý člen obou posloupností (využij goniometrické funkce) a zjistit, kolikaúhelníky musíme použít, abychom určili hodnotu čísla π na dvě desetinná čísla.
c) Vyjádří přesnou hodnotu π jako společné limity obou posloupností.

a) Odhadni velikost čísla π pomocí čtyřúhelníků.
Nakreslíme si obrázek kružnice o poloměru 1 a čtverce, který je kružnici opsán a vepsán.



Obvod kružnice je z obrázku:

- menší než obvod opsaného modrého čtverce,
- větší než obvod vepsaného zeleného čtverce.

Obvody:

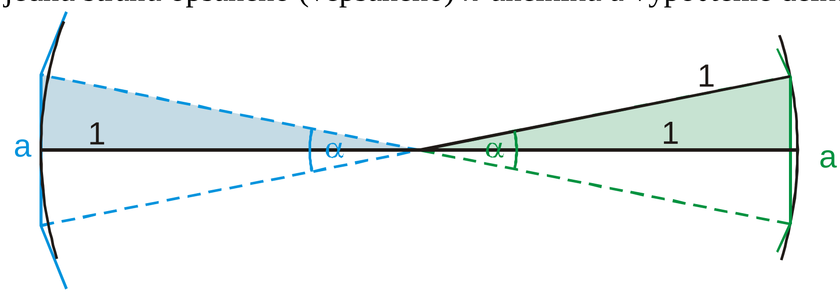
- Obvod kružnice: $o = 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$.
- Obvod opsaného modrého čtverce (strana $a = 2 \cdot 1 = 2$): $o = 4a = 4 \cdot 2 = 8$.
- Obvod vepsaného zeleného čtverce (strana $a = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$ - přepona rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku): $o = 4a = 4\sqrt{2}$.

Dosadíme: $o_{oc} > o_k > o_{vc}$

$8 > 2\pi > 4\sqrt{2} \qquad / : 2$

$4 > \pi > 2\sqrt{2} \doteq 2{,}8$

b) Najdi vzorce pro n-tý člen obou posloupností (využij goniometrické funkce) a zjistit, kolikaúhelníky musíme použít, abychom určili hodnotu čísla π na dvě desetinná čísla.
Nakreslíme si jednu stranu opsaného (vepsaného) n-úhelníku a vypočteme délku strany.



Z modrého pravoúhlého trojúhelníku:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{1} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{360°}{n} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{180°}{n} \Rightarrow a = 2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$$

Ze zeleného pravoúhlého trojúhelníku:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{1} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{360°}{n} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{180°}{n} \Rightarrow a = 2\sin\frac{180°}{n}$$

$o_{oc} = n \cdot a = a = 2n \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}$ $\qquad$ $o_{vc} = n \cdot a = a = 2n \cdot \sin\dfrac{180°}{n}$

Platí:

$o_{oc} > o_k > o_{vc}$

$2n \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180°}{n} > 2\pi > 2n \cdot \sin\dfrac{180°}{n} \qquad /:2$

$n \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180°}{n} > \pi > n \cdot \sin\dfrac{180°}{n}$

Hodnota π na 3 desetinná místa: $\pi \doteq 3{,}142$.

Pro $n = 10$: $10 \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180°}{10} \doteq 3{,}24 > \pi > 10 \cdot \sin\dfrac{180°}{10} \doteq 3{,}09$

Pro $n = 20$: $20 \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180°}{20} \doteq 3{,}17 > \pi > 20 \cdot \sin\dfrac{180°}{20} \doteq 3{,}13$

Pro $n = 30$: $30 \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180°}{30} \doteq 3{,}153 > \pi > 30 \cdot \sin\dfrac{180°}{30} \doteq 3{,}135$

Pro $n = 40$: $40 \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180°}{40} \doteq 3{,}148 > \pi > 40 \cdot \sin\dfrac{180°}{40} \doteq 3{,}138$

Pro $n = 50$: $50 \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180°}{50} \doteq 3{,}146 > \pi > 50 \cdot \sin\dfrac{180°}{50} \doteq 3{,}140$

Pro $n = 55$: $55 \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180°}{55} \doteq 3{,}145 > \pi > 55 \cdot \sin\dfrac{180°}{55} \doteq 3{,}140$

Pro $n = 56$: $56 \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180°}{56} \doteq 3{,}144892 \doteq 3{,}14 > \pi > 56 \cdot \sin\dfrac{180°}{56} \doteq 3{,}13994 \doteq 3{,}14$

Pokud bychom chtěli určit hodnotu čísla π na dvě desetinná čísla, museli bychom pro odhad využít padesáti šesti úhelníky.

c) Vyjádři přesnou hodnotu π jako společné limity obou posloupností.

$$\pi = \lim_{n \to \infty}\left(n \cdot \sin\frac{180°}{n}\right) = \lim_{n \to \infty}\left(n \cdot \mathrm{tg}\frac{180°}{n}\right)$$

Dodatek: Řešení bodu b) je samozřejmě daleko výhodnější pomocí tabulkového procesoru než na kalkulačce. Často se stává, že dojde k pokusu o vypočtení hodnot obou řad pro všechna přirozená *n* což vede k nesmyslným výsledkům pro $n = 1$ (správně 0 pro horní i dolní mez) a $n = 2$ (není definována horní mez kvůli $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2}$). Pro žáky je osvobozující, když si uvědomí, že nejmenším *n*, pro které má smysl hodnoty počítat je číslo 3 (k tomu, abychom se mohli bavit o *n*-úhelníku opsanému (vepsanému) kružnici je nutné uvažovat alespoň trojúhelník (tedy $n = 3$).

Shrnutí: