

8.4.4 Využití limit posloupností

Předpoklady: 080403

Pedagogická poznámka: Není samozřejmě možné odučit obsah hodiny s běžnou třídou za 45 minut. V tomto případě jde spíše o soupis možných úkolů pro různě disponované žáky ve třídě. Při práci s většinou třídy projdeme úvodní část hodiny společně s projektorem, chvíli samostatně pracujeme na příkladu 6 a po jeho poměrně časné kontrole žáci samostatně pracují na zbytku hodiny s tím, že bod 8 c) je pouze bonus pro zájemce.

Př. 1: Rozhodni zda platí věta: „Je-li posloupnost omezená, pak je konvergentní.“ Pokud věta neplatí, najdi protipříklad. Pokud věta platí, zkus zdůvodnit proč.

Věta určitě neplatí. Například posloupnost $([-1]^n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, ale není konvergentní (hodnoty neustále skákají mezi 1 a -1).

Př. 2: Rozhodni zda platí věta: „Je-li posloupnost neklesající (nerostoucí), pak je konvergentní.“ Pokud věta neplatí, najdi protipříklad. Pokud věta platí, zkus zdůvodnit proč.

Věta určitě neplatí. Například posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí (a tedy neklesající), ale není konvergentní (hodnoty neustále rostou a neblíží se k žádnému reálnému číslu).

Př. 3: Zkus na základě předchozích dvou příkladů navrhnout, které vlastnosti by posloupnost měla najednou splňovat, aby byla konvergentní.

Vyjdeme z předchozích dvou příkladů:

- posloupnost $([-1]^n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, ale není konvergentní, protože hodnoty neustále skákají mezi 1 a -1 . Kdyby se hodnoty omezené posloupnosti měnily „jedním směrem“ (například neustále rostly), posloupnost by zřejmě byla konvergentní. Hodnoty by nemohly neustále růst (kvůli omezenosti) a zároveň by se musely zvětšovat \Rightarrow posloupnosti by nezbylo nic jiného než se zespoda blížit k nějakému číslu.
- posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, ale není konvergentní, protože hodnoty neustále rostou a neblíží se k žádnému reálnému číslu. Kdybychom neklesající posloupnost omezili shora, posloupnost by zřejmě byla konvergentní. Hodnoty by neustále rostly a zároveň by nemohly překročit určitou hodnotu \Rightarrow posloupnosti by nezbylo nic jiného než se zespoda blížit k nějakému číslu.

Pokud bude posloupnost omezená a neklesající (nerostoucí, rostoucí, klesající), bude konvergentní.

Je-li posloupnost neklesající (rostoucí) a přitom shora omezená, pak je konvergentní.

Je-li posloupnost nerostoucí (klesající) a přitom zdola omezená, pak je konvergentní.

Vzpomínka z prvního ročníku: Jak určíme hodnotu $\sqrt{2}$?

$\sqrt{2}$ není možné napsat konečným desetinným rozvojem, ale můžeme její hodnotu dopočítat umocňováním libovolný počet desetinných míst.

$$1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1,4^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = 1,5^2 \Rightarrow 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$1,41^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = 1,42^2 \Rightarrow 1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$1,414^2 = 1,999396 < 2 < 2,002225 = 1,415^2 \Rightarrow 1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

$$1,4142^2 = 1,99996164 < 2 < 2,00024449 = 1,4143^2 \Rightarrow 1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$

$$1,41421^2 = 1,9999899241 < 2 < 2,0000182084 = 1,41422^2 \Rightarrow 1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$$

Takto můžeme za dlouhých zimních večerů pokračovat libovolně dlouho.

V pravém sloupci jsme získali dvě posloupnosti:

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: 1; 1,4; 1,41; 1,414; ...
- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$: 2; 1,5; 1,42; 1,415; ...

Př. 4: Urči vlastnosti posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Co z těchto vlastností vyplývá?

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

- rostoucí \Rightarrow neklesající
- shora omezená ($a_n < \sqrt{2}$)

\Rightarrow je konvergentní.

Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$:

- klesající \Rightarrow nerostoucí
- zdola omezená ($b_n > \sqrt{2}$)

\Rightarrow je konvergentní.

Hodnoty posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se zdola blíží k $\sqrt{2}$, hodnoty posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ se k $\sqrt{2}$ blíží shora \Rightarrow platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{2}$.

Proč to tak řešíme?

V matematické teorii máme dobře zavedená přirozená, celá i racionální čísla. Potřebujeme si však ujasnit, co jsou vlastně zač čísla iracionální. Ukázalo se, že k tomu dobře mohou posloužit limity posloupností a na každé iracionální (ale i racionální, tedy obecně reálné číslo) se můžeme dívat jako na limitu dvou posloupností analogických těm, které jsme našli pro $\sqrt{2}$.

Tvrzení $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{2}$ jsme zatím nedokázali. V důkazu se musíme ujistit, že hodnoty nekonečně mnoha členů obou posloupností padnou do libovolně tenkého pásu okolo $\sqrt{2} \Rightarrow$ potřebujeme popsat, že hodnoty obou posloupností se přibližují k sobě i k $\sqrt{2}$.

V tabulce je vidět, že v každém dalším řádku se odhad zpřesní o jedno desetinné místo \Rightarrow rozdíl $b_n - a_n$ se v každém kroku zmenší desetkrát $\Rightarrow b_n - a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$.

Dokazujeme limitu pro $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Vyjdeme z $b_n - a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, nahradíme b_n

nerovností $b_n > \sqrt{2}$ (dvě mouchy jednou ranou, zbavíme se b_n a objeví se $\sqrt{2}$)

$$a_n + \frac{1}{10^{n-1}} = b_n > \sqrt{2}$$

$$a_n + \frac{1}{10^{n-1}} > \sqrt{2} \quad / -a_n$$

$$\frac{1}{10^{n-1}} > \sqrt{2} - a_n$$

Rozdíl $\sqrt{2} - a_n$ je určitě kladný \Rightarrow můžeme přidat absolutní hodnotu

$$|\sqrt{2} - a_n| = |a_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{10^{n-1}}$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ určitě existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo

$$\frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|a_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$$

Př. 5: Doplň do druhého sloupce důkaz pro posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Dokazujeme limitu pro $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Vyjdeme z $b_n - a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, nahradíme b_n

nerovností $b_n > \sqrt{2}$ (dvě mouchy jednou ranou, zbavíme se b_n a objeví se $\sqrt{2}$)

$$a_n + \frac{1}{10^{n-1}} = b_n > \sqrt{2}$$

Dokazujeme limitu pro $(b_n)_{n=1}^{\infty}$

Vyjdeme z $b_n - a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, nahradíme a_n

nerovností $a_n < \sqrt{2}$ (dvě mouchy jednou ranou, zbavíme se a_n a objeví se $\sqrt{2}$)

$$b_n - \frac{1}{10^{n-1}} = a_n < \sqrt{2}$$

$$a_n + \frac{1}{10^{n-1}} > \sqrt{2} \quad / -a_n$$

$$\frac{1}{10^{n-1}} > \sqrt{2} - a_n$$

Rozdíl $\sqrt{2} - a_n$ je určitě kladný \Rightarrow můžeme přidat absolutní hodnotu

$$|\sqrt{2} - a_n| = |a_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{10^{n-1}}$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ určitě existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo

$$\frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|a_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$$

$$b_n - \frac{1}{10^{n-1}} < \sqrt{2} \quad / +\sqrt{2} + \frac{1}{10^{n-1}}$$

$$b_n - \sqrt{2} < \frac{1}{10^{n-1}}$$

Rozdíl $b_n - \sqrt{2}$ je určitě kladný \Rightarrow můžeme přidat absolutní hodnotu

$$|b_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{10^{n-1}}$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ určitě existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo

$$\frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|b_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{2}$$

Př. 6: Proč je třeba v předchozích úvahách pracovat s tím, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí a není možné používat názornější označení posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jako rostoucí a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jako klesající? Argumentuj pomocí hodnoty $\sqrt{2}$ na 25 desetinných míst $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887$.

Při zpřesňování výsledků se může stát, že se hodnota posloupnosti a_n nebo b_n nezmění.

Například při zpřesnění z 12 na 13 desetinných míst se odhady změní takto:

- posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: z $\sqrt{2} = 1,414213562373$ na $\sqrt{2} = 1,4142135623730$
- posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$: z $\sqrt{2} = 1,414213562374$ na $\sqrt{2} = 1,4142135623731$

\Rightarrow hodnota posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nezměnila \Rightarrow hodnota neklesající posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nemění vždy, když desetinný rozvoj obsahuje nulu.

Podobně hned v následujícím kroku:

- posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: z $\sqrt{2} = 1,4142135623730$ na $\sqrt{2} = 1,41421356237309$
- posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$: z $\sqrt{2} = 1,4142135623731$ na $\sqrt{2} = 1,41421356237310$

\Rightarrow hodnota posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ se nezměnila \Rightarrow hodnota nerostoucí posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ se nemění vždy, když desetinný rozvoj obsahuje devítku.

Př. 7: Jedna z nejdůležitějších matematických konstant je dána jako limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Zjisti, o kterou matematickou konstantu jde.

Zkusíme spočítat některý vzdálenější člen posloupnosti:

- $n = 100 : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,7048 \Rightarrow$ zřejmě jde o číslo e ,
- $n = 1000 : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,7169 \Rightarrow$ opravdu to bude číslo e .

Přesnější hodnota čísla: $e = 2,7182818284590452353$.

Př. 8: Daleko rychleji než postupem z úvodu hodiny je možné získat hodnotu odmocniny z kladného čísla a takto:

Nejprve zvolíme kladné číslo x_1 jehož druhá mocnina je větší než a . Pak platí:

$\frac{a}{x_1} < \sqrt{a} < x_1$. Odmocnina z a je pak limita rekurentně dané posloupnosti

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_n} + x_n \right).$$

a) Urči tolik prvních členů posloupnosti, abys určil hodnotu $\sqrt{2}$ s přesností na pět desetinných míst.

b) Vypočti pomocí tohoto algoritmu $\sqrt{7}$ a $\sqrt{0,3}$ na tři desetinná místa.

c) Dokaž platnost tohoto postupu (předpokládej, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, poté využij rovnost $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = c$).

a) Urči tolik prvních členů posloupnosti, abys určil hodnotu $\sqrt{2}$ s přesností na pět desetinných míst.

Přibližná hodnota $\sqrt{2}$ na šest desetinných míst: $\sqrt{2} \doteq 1,414214$.

Jako x_1 zvolíme číslo 2 ($2^2 > 2$ a tedy $x_1^2 > a$)

Určujeme další členy posloupnosti vzorcem $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_n} + x_n \right)$:

- $x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2} + 2 \right) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} = 1,5,$
- $x_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{17}{6} \right) = \frac{17}{12} \doteq 1,41666$
- $x_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\frac{17}{12}} + \frac{17}{12} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{24}{17} + \frac{17}{12} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{577}{204} \right) = \frac{577}{408} \doteq 1,414216 \Rightarrow$ vypočtená

hodnota se shoduje na prvních pěti desetinných místech.

b) Vypočti pomocí tohoto algoritmu $\sqrt{7}$ a $\sqrt{0,3}$ na tři desetinná místa.

Přibližná hodnota $\sqrt{7}$ na šest desetinných míst: $\sqrt{7} \doteq 2,645751$.

Jako x_1 zvolíme číslo 3 ($3^2 > 7$ a tedy $x_1^2 > a$)

Určujeme další členy posloupnosti vzorcem $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_n} + x_n \right)$:

- $x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{3} + 3 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{3} + \frac{9}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{8}{3} = 2, \bar{6}$,
- $x_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{\frac{8}{3}} + \frac{8}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{21}{8} + \frac{8}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{63}{24} + \frac{64}{24} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{127}{24} = \frac{127}{48} \doteq 2,64583 \Rightarrow$ vypočtená

hodnota se shoduje na prvních třech desetinných místech.

Přibližná hodnota $\sqrt{0,3}$ na šest desetinných míst: $\sqrt{0,3} \doteq 0,547723$.

Jako x_1 zvolíme číslo 0,6 ($0,6^2 = 0,36 > 0,3$ a tedy $x_1^2 > a$)

Určujeme další členy posloupnosti vzorcem $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_n} + x_n \right)$:

- $x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}} + \frac{6}{10} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{6} + \frac{6}{10} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{6}{10} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{10} + \frac{6}{10} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{10} = \frac{11}{20} = 0,55$,
- $x_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{3}{10}}{\frac{11}{20}} + \frac{11}{20} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{11} + \frac{11}{20} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{120}{220} + \frac{121}{220} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{241}{220} \doteq 0,54772727 \Rightarrow$

vypočtená hodnota se shoduje na prvních pěti desetinných místech (tedy více než požadovaných třech).

c) Dokaž platnost tohoto postupu (předpokládej, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, poté využij rovnost $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = c$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_n} + x_n \right)$$

$$\text{Využijeme } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c : \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_n} + x_n \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} + c \right) = c$$

$$\text{Upravujeme jen poslední rovnost: } \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} + c \right) = c \quad / \cdot 2$$

$$\frac{a}{c} + c = 2c \quad / \cdot c$$

$$a + c^2 = 2c^2 \quad / -c^2$$

$$c^2 = a \quad / \sqrt{\quad}$$

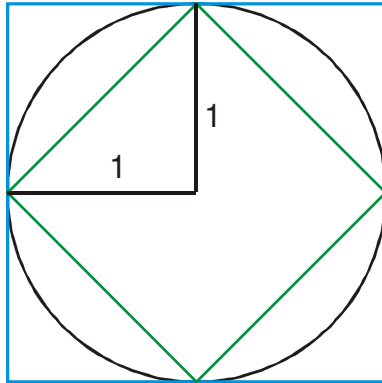
$$c = \sqrt{a}$$

Př. 9: Hodnota čísla π byla původně určována pomocí vztahu mezi obvodem kružnice a obvodem pravidelných n -úhelníků, které jsou této kružnici opsány a vepsány.

- a) Odhadni velikost čísla π pomocí čtyřúhelníků.
 b) Najdi vzorce pro n -tý člen obou posloupností (využij goniometrické funkce) a zjistit, kolikaúhelníky musíme použít, abychom určili hodnotu čísla π na dvě desetinná čísla.
 c) Vyjádří přesnou hodnotu π jako společné limity obou posloupností.

a) Odhadni velikost čísla π pomocí čtyřúhelníků.

Nakreslíme si obrázek kružnice o poloměru 1 a čtverce, který je kružnici opsán a vepsán.



Obvod kružnice je z obrázku:

- menší než obvod opsaného modrého čtverce,
- větší než obvod vepsaného zeleného čtverce.

Obvody:

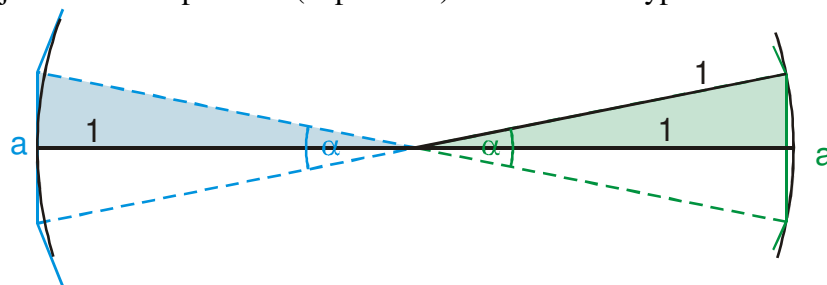
- Obvod kružnice: $o = 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$.
- Obvod opsaného modrého čtverce (strana $a = 2 \cdot 1 = 2$): $o = 4a = 4 \cdot 2 = 8$.
- Obvod vepsaného zeleného čtverce (strana $a = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$ - přepona rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku): $o = 4a = 4\sqrt{2}$.

Dosadíme: $o_{oc} > o_k > o_{vc}$

$$8 > 2\pi > 4\sqrt{2} \quad | : 2$$

$$4 > \pi > 2\sqrt{2} \doteq 2,8$$

b) Najdi vzorce pro n -tý člen obou posloupností (využij goniometrické funkce) a zjistit, kolikaúhelníky musíme použít, abychom určili hodnotu čísla π na dvě desetinná čísla. Nakreslíme si jednu stranu opsaného (vepsaného) n -úhelníku a vypočteme délku strany.



Z modrého pravoúhlého trojúhelníku:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{1} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow a = 2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

Ze zeleného pravoúhlého trojúhelníku:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{1} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow a = 2 \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$o_{oc} = n \cdot a = a = 2n \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$o_{vc} = n \cdot a = a = 2n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$$

Platí:

$$o_{oc} > o_k > o_{vc}$$

$$2n \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} > 2\pi > 2n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} \quad / : 2$$

$$n \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} > \pi > n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$$

Hodnota π na 3 desetinná místa: $\pi \doteq 3,142$.

$$\text{Pro } n = 10 : 10 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{10} \doteq 3,24 > \pi > 10 \cdot \sin \frac{180^\circ}{10} \doteq 3,09$$

$$\text{Pro } n = 20 : 20 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{20} \doteq 3,17 > \pi > 20 \cdot \sin \frac{180^\circ}{20} \doteq 3,13$$

$$\text{Pro } n = 30 : 30 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{30} \doteq 3,153 > \pi > 30 \cdot \sin \frac{180^\circ}{30} \doteq 3,135$$

$$\text{Pro } n = 40 : 40 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{40} \doteq 3,148 > \pi > 40 \cdot \sin \frac{180^\circ}{40} \doteq 3,138$$

$$\text{Pro } n = 50 : 50 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{50} \doteq 3,146 > \pi > 50 \cdot \sin \frac{180^\circ}{50} \doteq 3,140$$

$$\text{Pro } n = 55 : 55 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{55} \doteq 3,145 > \pi > 55 \cdot \sin \frac{180^\circ}{55} \doteq 3,140$$

$$\text{Pro } n = 56 : 56 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{56} \doteq 3,144892 \doteq 3,14 > \pi > 56 \cdot \sin \frac{180^\circ}{56} \doteq 3,13994 \doteq 3,14$$

Pokud bychom chtěli určit hodnotu čísla π na dvě desetinná čísla, museli bychom pro odhad využít padesáti šesti úhelníky.

c) Vyjádří přesnou hodnotu π jako společné limity obou posloupností.

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \right)$$

Dodatek: Řešení bodu b) je samozřejmě daleko výhodnější pomocí tabulkového procesoru než na kalkulačce. Často se stává, že dojde k pokusu o vypočtení hodnot obou řad pro všechna přirozená n což vede k nesmyslným výsledkům pro $n = 1$ (správně 0 pro horní i dolní mez) a $n = 2$ (není definována horní mez kvůli $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$). Pro žáky je osvobozující, když si uvědomí, že nejmenším n , pro které má smysl hodnoty počítat je číslo 3 (k tomu, abychom se mohli bavit o n -úhelníku opsanému (vepsanému) kružnici je nutné uvažovat alespoň trojúhelník (tedy $n = 3$)).

Shrnutí: