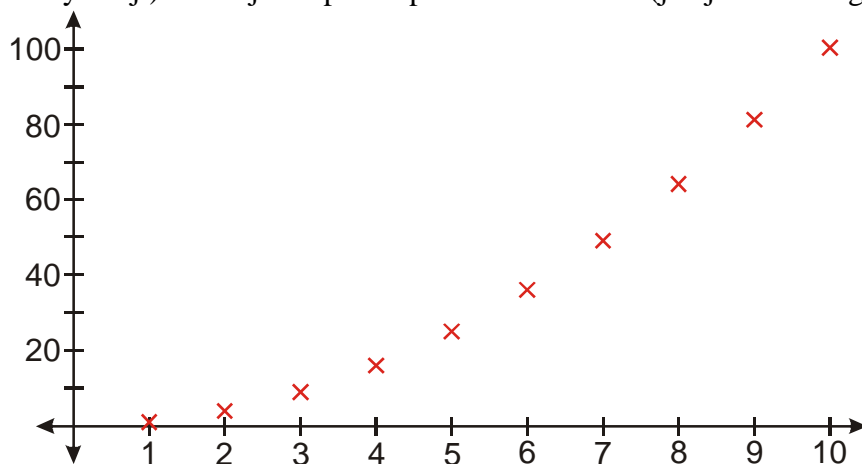


8.3.5 Nevlastní limita posloupnosti

Předpoklady: 080302

Př. 1: Je dána posloupnost $(n^2)_{n=1}^{\infty}$. Urči prvních deset členů, nakresli graf posloupnosti a rozhodni, zda má limitu.

První deset členů posloupnosti: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \Rightarrow hodnoty se neustále (a čím dál rychleji) zvětšují \Rightarrow posloupnost nemá limitu (jak je vidět i z grafu).

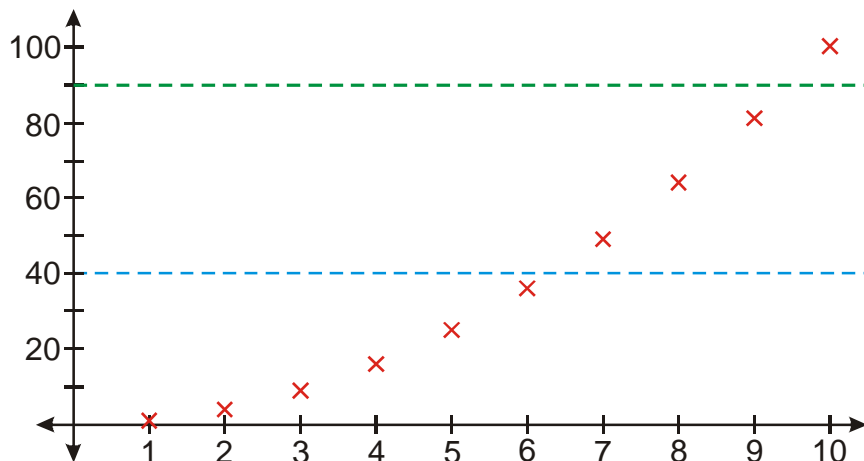


Posloupnost $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu, přesto nemůžeme říct, že by její hodnoty nikam nesměřovaly. Hodnoty se neustále (a stále rychleji) zvětšují \Rightarrow posloupnost se pro n blížící se k nekonečnu blíží také k nekonečnu.

Říkáme, že posloupnost $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ má **nevlastní limitu** $+\infty$. Přídavné jméno nevlastní používáme k odlišení od konvergentních posloupností, které mají limitu (které se říká vlastní limita).

Stejně jako u vlastní limity i u nevlastní limity musíme najít matematicky přesné vyjádření nematematického slovního spojení "posloupnost se pro n blížící se k nekonečnu blíží také k nekonečnu".

Čím se liší posloupnost s nevlastní limitou $+\infty$ od ostatních posloupností?
Hodnoty rostou nade všechny meze \Rightarrow pokud si zvolíme libovolně velké číslo, hodnoty posloupnosti určitě tuto hodnotu překročí a už nad ní zůstanou.



Na obrázku je vidět, jak posloupnost překoná hodnoty 40 (od členu a_7) i 90 (od členu a_{10}).

Informace z grafu můžeme ověřit i početně.

Kdy překročí členy posloupnosti hodnotu 40?

$$a_n = n^2 > 40 \quad (\text{obě strany jsou kladné} \Rightarrow \text{můžeme odmocnit a nerovnost se zachová})$$

$$n > \sqrt{40} \doteq 6,3 \Rightarrow \text{od členu } a_7 \text{ jsou už všechny členy posloupnosti větší než 40.}$$

Kdy překročí členy posloupnosti hodnotu 90?

$$a_n = n^2 > 90 \quad (\text{obě strany jsou kladné} \Rightarrow \text{můžeme odmocnit a nerovnost se zachová})$$

$$n > \sqrt{90} \doteq 9,5 \Rightarrow \text{od členu } a_{10} \text{ jsou už všechny členy posloupnosti větší než 90.}$$

Můžeme to zkusit i obecně.

$$a_n = n^2 > K \quad (\text{volíme } K > 0, \text{ obě strany jsou kladné} \Rightarrow \text{můžeme odmocnit a nerovnost se zachová})$$

$$n > \sqrt{K} \Rightarrow \text{od členu } a_n \text{ jsou už všechny členy posloupnosti větší než } K.$$

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu plus nekonečno, právě když pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n > K$. Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Př. 2: Rozhodni, zda má posloupnost $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ nevlastní limitu plus nekonečno. Pokud ano, dokaž pravdivost tvrzení.

Několik prvních členů posloupnosti $(2^n)_{n=1}^{\infty}$: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... \Rightarrow zdá se, že posloupnost je rostoucí a blíží se k plus nekonečnu \Rightarrow posloupnost $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu plus nekonečno.

Důkaz: Zvolíme libovolné reálné $K > 0$ (pro $K \leq 0$ podmínka pro existenci nevlastní limity platí automaticky, protože všechny členy posloupnosti jsou kladné).

Chceme najít člen posloupnosti, pro který platí $a_n > K$.

$2^n > K$ (logaritmuje při základu 10 \Rightarrow nemění se znaménko nerovnosti)

$\log 2^n > \log K$

$n \cdot \log 2 > \log K$

$n > \frac{\log K}{\log 2} \Rightarrow$ pro každé reálné číslo K najdeme takové n , že všechny členy posloupnosti za

ním jsou větší než $K \Rightarrow$ posloupnost $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu plus nekonečno.

Př. 3: Mohou se hodnoty posloupnosti blížit také k mínus nekonečnu? Jakou vlastnost by takové posloupnosti musely mít? Vyslov definici nevlastní limity $-\infty$.

Stačí hodnoty posloupnosti $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ vynásobit číslem (-1) a budou se blížit k mínus nekonečnu.

Hodnoty klesají pode všechny meze \Rightarrow pokud si zvolíme libovolně malé číslo, hodnoty posloupnosti určitě tuto hodnotu překročí a už pod ní zůstanou.

Definice: Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu mínus nekonečno, právě když pro každé reálné číslo L existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n < L$. Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Př. 4: Může být posloupnost, která má nevlastní limitu omezená? Proč?

Posloupnost má nevlastní limitu \Rightarrow její hodnoty jsou od určitého členu větší (nebo menší) než libovolné reálné číslo \Rightarrow posloupnost nemůže být omezená

Př. 5: Rozhodni o platnosti následujících vět.

a) Každá neomezená posloupnost má nevlastní limitu.

b) Každá neomezená monotónní posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$.

c) Každá posloupnost, která má nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$ je monotónní.

a) Každá neomezená posloupnost má nevlastní limitu.

Věta neplatí. Posloupnost $([-2]^n)_{n=1}^{\infty}$ je neomezená, ale nemá nevlastní limitu (neustále se střídají kladné a záporné hodnoty s rostoucí absolutní hodnotou).

b) Každá neomezená monotónní posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$.

Věta platí. Jsou dvě možnosti.

- Posloupnost je neomezená a rostoucí \Rightarrow každý člen posloupnosti je větší než člen předchozí a zároveň neexistuje číslo, které by bylo větší než všechny hodnoty posloupnosti \Rightarrow pro každé číslo najdeme takový člen posloupnosti, který je větší a protože všechny následující členy jsou větší než nalezený člen, jsou větší i než zvolené číslo \Rightarrow splněna definice nevlastní limity plus nekonečno.
- Posloupnost je neomezená a klesající \Rightarrow každý člen posloupnosti je menší než člen předchozí a zároveň neexistuje číslo, které by bylo menší než všechny hodnoty posloupnosti \Rightarrow pro každé číslo najdeme takový člen posloupnosti, který je menší a protože všechny následující členy jsou menší než nalezený člen, jsou menší i než zvolené číslo \Rightarrow splněna definice nevlastní limity minus nekonečno.

c) Každá posloupnost, která má nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$ je monotónní.

Věta neplatí. Například posloupnost $\left(n + 2[-1]^n\right)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu plus nekonečno, ale není monotónní.

Př. 6: Sepiš přehled všech situací, které mohou nastat ohledně limit posloupností. Uveď u každé situace příklad posloupnosti.

Mohou nastat celkem čtyři situace:

- Posloupnost je konvergentní, její limitou je reálné číslo a : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (posloupnost má vlastní limitu a), například posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Posloupnost je divergentní a má nevlastní limitu $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$), například posloupnost $\left(n^2\right)_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$.
- Posloupnost je divergentní a má nevlastní limitu $-\infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ (posloupnost má nevlastní limitu $-\infty$), například posloupnost $\left(-2^n\right)_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} -2^n = -\infty$.
- Posloupnost je divergentní a nemá nevlastní limitu ani $+\infty$ ani $-\infty$, například posloupnost $\left([-1]^n\right)_{n=1}^{\infty}$.

Př. 7: Pro které hodnoty a_1 a d je aritmetická posloupnost:

- a) konvergentní, b) divergentní s nevlastní limitou $+\infty$,
c) divergentní s nevlastní limitou $-\infty$, d) divergentní bez nevlastní limity?

Aritmetická posloupnost: neustále přičítáme diferenci \Rightarrow nezáleží na hodnotě prvního členu, o limitách rozhoduje diference.

a) konvergentní

Aritmetická posloupnost je konvergentní, právě když $d = 0$. Potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1$.

b) divergentní s nevlastní limitou $+\infty$

Aritmetická posloupnost je divergentní s nevlastní limitou $+\infty$, právě když $d > 0$.

c) divergentní s nevlastní limitou $-\infty$

Aritmetická posloupnost je divergentní s nevlastní limitou $-\infty$, právě když $d < 0$.

d) divergentní bez nevlastní limity

Aritmetická posloupnost nemůže být divergentní bez nevlastní limity.

Př. 8: Pro které hodnoty a_1 a q je geometrická posloupnost:

- a) konvergentní, b) divergentní s nevlastní limitou $+\infty$,
c) divergentní s nevlastní limitou $-\infty$, d) divergentní bez nevlastní limity?

Geometrická posloupnost: neustále násobíme kvocientem \Rightarrow záleží na hodnotě prvního členu i kvocientu (jako u monotónnosti a omezenosti).

a) konvergentní

Geometrická posloupnost je konvergentní, právě když $|q| < 1$ (potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$) nebo když $q = 1$ ((potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1$) nebo když $a_1 = 0$ (potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$)).

b) divergentní s nevlastní limitou $+\infty$

Geometrická posloupnost je divergentní s nevlastní limitou $+\infty$, právě když $q > 1$ s $a_1 > 0$.

c) divergentní s nevlastní limitou $-\infty$

Geometrická posloupnost je divergentní s nevlastní limitou $-\infty$, právě když $q > 1$ s $a_1 < 0$.

d) divergentní bez nevlastní limity

Geometrická posloupnost je divergentní bez nevlastní limity, právě když $q \leq -1$ a $a_1 \neq 0$.

Shrnutí: Posloupnost má nevlastní limitu plus nekonečno, když překoná libovolně velká číslo.