

8.4.6 Nekonečná geometrická řada

Předpoklady: 080402, 080405

Máme list papíru. Rozstříháme ho na dvě poloviny, jednu dáme na hromádku a druhou opět rozstříháme na poloviny (tedy čtvrtiny původního listu). Jednu z těchto polovin opět položíme na hromádku a zbývající opět stříháme na půl. A tak budeme postupovat pořád dál. Jak velký kus papíru bude na hromádce po nekonečně mnoha rozstříženích?

Na hromádce je všechen papír z původního listu, kromě kousku, který držíme v ruce. Velikost kousku v ruce (tedy toho, co nám chybí k tomu, aby na stole byl celý papír) se velmi rychle zmenšuje (blíží se k nule), ale pořád nám v ruce něco zbývá (taky nám zbývá ještě nekonečněkrát rozstříhnout zbyteček papíru v ruce) \Rightarrow na stav po nekonečně mnoha rozstříženích se nemůžeme dívat jako na něco dosažitelného reálným stříháním, jde o stav, ke kterému situace reálným stříháním pouze směřuje \Rightarrow protože kousek papíru v ruce směřuje k nule, směřuje velikost hromádky k původní velikosti listu \Rightarrow po nekonečně mnoha rozstříženích bude na stole opět celý papír.

Zajímavé – součtem nekonečně mnoha papírků jsme nezískali nekonečně velkou papírovou plochu, ale pouze plochu o velikosti 1 \Rightarrow součet nekonečně mnoha čísel nemusí být nekonečný \Rightarrow má smysl ho zkoumat.

Dodatek: Pokud se zeptáte na stříhání papírků, většina studentů bude ihned souhlasit s tím, že součet bude konečný (problém je spíš přesvědčit studenty, že nebude nic chybět). Pokud se zeptáte ještě předtím, bude počet těch, kteří u nekonečného součtu předpokládají nekonečný výsledek docela vysoký. Jinak fakt, že i součet nekonečně mnoha čísel může být konečný, je vysvětlením některých aporií, například Achillea a želvy.

Vrátíme se ke stříhání papírků.

Př. 1: Najdi posloupnosti, které udávají:

a) velikost papírku, který vznikl n -tým stříhem

b) součet ploch všech papírků, které jsou na hromádce po n -tém stříhu.

Řešení zapisuj do tabulky:

	velikost papírku, který vznikl n -tým stříhem	součet ploch všech papírků, které jsou na hromádce po n -tém stříhu	
první stříh	$a_1 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$s_1 = a_1$
	velikost papírku, který vznikl n -tým stříhem	součet ploch všech papírků, které jsou na hromádce po n -tém stříhu	

první stříh	$a_1 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$s_1 = a_1$
druhý stříh	$a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$s_2 = a_1 + a_2$
třetí stříh	$a_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$	$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
...
n -tý stříh	$a_n = \frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$	$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Plocha všech nastříhaných papírků se rovná součtu prvních n členů geometrické posloupnosti

$$\Rightarrow \text{použijeme vzorec: } s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}.$$

Zajímá nás, co udělá součet, když se n blíží k nekonečnu \Rightarrow spočítáme limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1.$$

Výsledek odpovídá našemu odhadu.

Terminologie:

Na začátku jsme měli posloupnost: $a_1; a_2; \dots; a_n; \dots = (a_n)_{n=1}^{\infty}$.

- Symbol $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečná řada** (ze členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$).
- Pokud je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická s kvocientem q , nazýváme symbol $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **nekonečná geometrická řada** s kvocientem q (naš předchozí a obecně nejčastější případ).
- Posloupnost $s_1 = a_1; s_2 = a_1 + a_2; \dots; s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n; \dots = (s_n)_{n=1}^{\infty}$ jejíž členy vznikly sčítáním prvních n členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, nazýváme **posloupnost částečných součtů**.
- Když jsme hledali součet nekonečné řady, zjišťovali jsme, zda je posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů konvergentní (má limitu).
- Když je posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, říkáme, že **nekonečná řada** $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **má součet** a platí: $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

- Když je posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ divergentní (nemá limitu), říkáme, že **nekonečná řada**
 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **nemá součet**.

V našem konkrétním případě:

- $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$ členy posloupnosti a_n (velikosti papírků, které přidáváme na stůl),
- $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}; \dots$ členy s_n posloupnosti částečných součtů (velikosti hromádek, které vznikají na stole).

Př. 2: Je dána posloupnost $([-1]^n)_{n=1}^{\infty}$. Vypiš prvních osm členů posloupnosti. Sestav posloupnost částečných součtů odpovídající nekonečné řady a rozhodni, zda má tato řada součet.

Prvních osm členů: $-1; 1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots$

Částečné součty:

- $s_1 = -1$,
- $s_2 = -1 + 1 = 0$,
- $s_3 = -1 + 1 - 1 = -1$,
- $s_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$,
- \dots

Posloupnost částečných součtů vypadá takto: $-1; 0; -1; 0; -1; 0; \dots$

\Rightarrow Posloupnost neustále osciluje mezi dvěma hodnotami (-1 a 0) \Rightarrow není konvergentní \Rightarrow nekonečná řada $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ nemá součet.

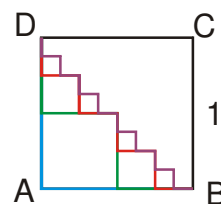
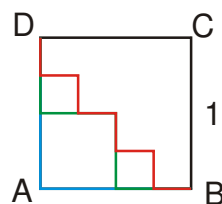
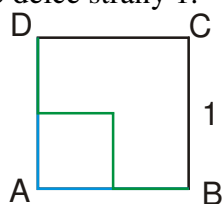
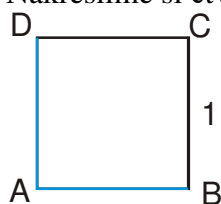
Výsledek předchozího příkladu znamená, že nemůžeme psát za výraz $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ znaménko rovnosti s nějakým výsledkem. „Správných“ výsledků by totiž bylo nekonečně mnoho (kvůli podivnosti nekonečna).

Ve všech následujících výpočtech rozdělíme řadu $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ na dvojice stejné barvy s nulovým součtem a zbytek (černě), ze kterého získáme „výsledek“:

- $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 0$,
- $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = -1$,
- $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1$,
- $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = -2$.

Při troše snahy získáme jako „výsledek“ libovolné celé číslo \Rightarrow závěr, že vůbec nemá smysl hledat součet řady $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, je velice rozumný.

Př. 3: Najdi chybu v následující úvaze.
Nakreslíme si čtverec o délce strany 1.



Postupně kreslíme lomené čáry $L_1, L_2, L_3, L_4, \dots$ (viz obrázek). Lomené čáry se postupně blíží úhlopříčce čtverce. Velikost lomených čar se rovná 2 \Rightarrow délka úhlopříčky čtverce o straně 1 je rovna 2.

Tvrzení v textu je zjevně nesprávné, protože délka úhlopříčky je $\sqrt{2}$.

Důvod je zřejmý. Pokud bychom se na délku úhlopříčky chtěli dívat jako na součet nekonečné řady složené z nekonečného počtu členů posloupnosti L_n , musela by délka úhlopříčky být limitou délek lomených čar. Tak tomu ale není, neboť rozdíl mezi délkou úhlopříčky a délkami lomených čar se nezmenšuje (délka libovolné lomené čáry je stejná jako délka čáry L_1).

Př. 4: Je dána geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q . Rozhodni, pro jaké hodnoty kvocientu q bude mít nekonečná geometrická řada

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ součet a vypočti ho.}$$

Pokud má mít nekonečná geometrická řada $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet, musí mít

posloupnost částečných součtů $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu s , tedy se její členy musí této hodnotě postupně blížit \Rightarrow členy původní posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, které způsobují rozdíly mezi členy posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, se musí blížit nule (kdyby se neblížily nule, nemohli bychom sečtením nekonečně mnoha členů získat konečné číslo) \Rightarrow musí platit $|q| < 1$.

Hledáme součet \Rightarrow hledáme limitu posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

s_n je součet prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty} \Rightarrow$ platí: $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Součet řady je limitou posloupnosti $s_n \Rightarrow$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} q^n - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} q - \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = a_1 \cdot \frac{0 - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Nekonečná geometrická řada $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ve které $a_1 \neq 0$, je konvergentní, právě když pro její kvocient q platí $|q| < 1$. Pro součet s konvergentní geometrické řady platí $s = \frac{a_1}{1 - q}$.

Následující příklad je opravdu bonusový pouze pro ty, kteří by se určováním součtu nekonečných geometrických řad nudili.

Př. 5: (BONUS) Je dána posloupnost $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$. Rozhodni, zda existuje součet nekonečné řady $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$. Pokud existuje, urči ho.

Prvních několik členů posloupnosti $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$: $\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30}; \dots$

Hledáme částečné součty:

$$s_1 = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$s_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

...

\Rightarrow Zdá se, že platí: $s_n = \frac{n}{n+1}$. Musíme si to ověřit, například matematickou indukcí.

1. ověříme pro $n = 1$

$$s_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ vyšlo.}$$

2. předpokládáme platnost pro k , dokazujeme platnost pro $k+1$.

$$\text{Předpoklad: } s_k = \frac{k}{k+1}.$$

Dokazujeme platnost pro $k+1$ (chceme získat vzorec $s_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$):

$$\begin{aligned} s_{k+1} = s_k + a_{k+1} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

\Rightarrow vzorec platí \Rightarrow stačí spočítat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$.

Zkoumaná řada má součet, který je roven 1.

Př. 6: Urči součet nekonečné řady.

a) $\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots$

b) $4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \dots +$

c) $2 + 3 + \frac{9}{2} + \dots$

d) $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \dots$

a) $\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots \Rightarrow$ platí: $a_1 = \frac{1}{10}$, $q = \frac{1}{10} \Rightarrow |q| < 1 \Rightarrow$ řada má součet.

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}$.

b) $4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \dots + \Rightarrow$ platí: $a_1 = 4$, $q = \frac{2}{3} \Rightarrow |q| < 1 \Rightarrow$ řada má součet.

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{\frac{1}{3}} = 12$.

c) $2 + 3 + \frac{9}{2} + \dots \Rightarrow$ platí: $a_1 = 2$, $q = \frac{3}{2} \Rightarrow q \geq 1 \Rightarrow$ řada nemá součet.

d) $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \dots \Rightarrow$ platí: $a_1 = \frac{2}{3}$, $q = -\frac{2}{3} \Rightarrow |q| < 1 \Rightarrow$ řada má součet.

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5}$.

Př. 7: Petáková:

strana 72/cvičení 70 b) c) d)

strana 72/cvičení 71 b) d)

strana 72/cvičení 72 b) c) e) i)

Shrnutí: Součet nekonečně mnoha čísel nemusí být nekonečné číslo. Součet takových geometrických řad určíme dosazením do vzorce $s = \frac{a_1}{1-q}$.