

8.4.7 Příklady na součet nekonečné řady

Předpoklady: 080406

Př. 1: Zapiš číslo $0,\overline{24}$ jako zlomek v základním tvaru.

Zapišeme si číslo jako součet nekonečné řady: $0,\overline{24} = 0,24 + 0,0024 + 0,000024 + \dots$

Platí: $a_1 = 0,24$, $q = 0,01$

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,24}{1-0,01} = \frac{0,24}{0,99} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$.

Př. 2: Zapiš číslo $3,\overline{264}$ jako zlomek v základním tvaru.

Problém: číslo $3,\overline{264}$ nejde napsat jako součet nekonečné řady \Rightarrow rozdělíme úkol na dvě části: číslo $3,2$ připočteme k součtu řady $0,\overline{064} = 0,064 + 0,00064 + 0,0000064 + \dots$

$0,\overline{064} = 0,064 + 0,00064 + 0,0000064 + \dots \Rightarrow$ platí: $a_1 = 0,064$, $q = 0,01$

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,064}{1-0,01} = \frac{0,064}{0,99} = \frac{64}{990}$.

Sečteme obě čísla: $3,2 + \frac{64}{990} = \frac{1616}{495}$.

Př. 3: Zapiš číslo $0,\overline{9}$ jako zlomek v základním tvaru.

Zapišeme si číslo jako součet nekonečné řady: $0,\overline{9} = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots$

Platí: $a_1 = 0,9$, $q = 0,1$

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,9}{1-0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$.

Př. 4: Urči, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou dané nekonečné řady konvergentní a pokud to jde, urči jejich součet.

a) $2 + 6x + 18x^2 + 54x^3 + \dots$

b) $x + 2x + 4x + 8x + \dots$

a) $2 + 6x + 18x^2 + 54x^3 + \dots$

Platí: $a_1 = 2$, $q = 3x \Rightarrow$ aby řada měla součet musí platit: $|q| < 1$

$$\Rightarrow |3x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

\Rightarrow pro součet řady potom platí: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-3x}$

b) $x + 2x + 4x + 8x + \dots$

Platí: $a_1 = x$, $q = 2 \Rightarrow$ aby řada měla součet, musí platit: $|q| < 1$, což nenastane nikdy.

Př. 5: Vyřeš rovnice:

$$\text{a) } 2x + x + \frac{x}{2} + \dots = 10$$

$$\text{b) } 2 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \dots = \frac{4}{3}x$$

$$\text{a) } 2x + x + \frac{x}{2} + \dots = 10$$

levá strana: nekonečná geometrická řada $2x + x + \frac{x}{2} + \dots$

Platí: $a_1 = 2x$, $q = \frac{1}{2} \Rightarrow$ řada má součet (platí $|q| < 1$)

Uurčíme součet levé strany: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2x}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2x}{\frac{1}{2}} = 4x$

Levou stranu rovnice nahradíme součtem: $4x = 10$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$\text{b) } 2 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \dots = \frac{4}{3}x$$

levá strana: nekonečná geometrická řada $2 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \dots$

Platí: $a_1 = 2$, $q = -\frac{x}{2} \Rightarrow$ řada má součet, pokud platí $\left|-\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow x \in (-2; 2)$.

Uurčíme součet levé strany: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{2}{1+\frac{x}{2}} = \frac{2}{\frac{2+x}{2}} = \frac{4}{2+x}$.

Levou stranu rovnice nahradíme součtem: $\frac{4}{2+x} = \frac{4}{3}x \quad / \cdot \frac{3(2+x)}{4}$.

$$3 = x(x+2)$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$x_1 = -3$ - není řešením rovnice, nesplňuje podmínku pro kvocient řady

$$x_2 = 1$$

$$K = \{1\}$$

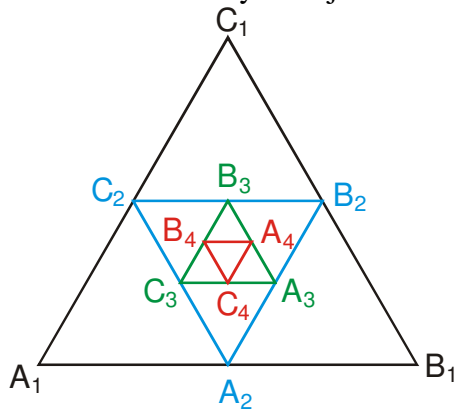
Př. 6: Do rovnostranného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ o délce strany 4 je vepsán druhý trojúhelník $A_2B_2C_2$ jehož vrcholy leží ve středech stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Podobným způsobem je do trojúhelníku $A_2B_2C_2$ vepsán trojúhelník $A_3B_3C_3$, do trojúhelníku

$A_3B_3C_3$ trojúhelník $A_4B_4C_4$ a tak dále až do nekonečna. Urči:

a) součet obvodů

b) součet obsahů

všech takto vzniklých trojúhelníků.



Délka strany každého trojúhelníku je rovna polovině strany trojúhelníku, do kterého jsme jej vepsali \Rightarrow

trojúhelník $A_1B_1C_1$: $a = 4$

trojúhelník $A_2B_2C_2$: $a = 2$

trojúhelník $A_3B_3C_3$: $a = 1 \quad \dots$

a) součet obvodů

obvod trojúhelníku $A_1B_1C_1$: $4 + 4 + 4 = 12$

obvod trojúhelníku $A_2B_2C_2$: $2 + 2 + 2 = 6$

obvod trojúhelníku $A_3B_3C_3$: $1 + 1 + 1 = 3$

Získáme nekonečnou řadu: $12 + 6 + 3 + \frac{3}{2} + \dots$

Platí: $a_1 = 12$, $q = \frac{1}{2}$, součet existuje $|q| < 1$

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$.

b) součet obsahů

obsah rovnostranného trojúhelníku: $S = \frac{av_a}{2} = \frac{a \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

obsah trojúhelníku $A_1B_1C_1$: $4^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

obsah trojúhelníku $A_2B_2C_2$: $2^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

obsah trojúhelníku $A_3B_3C_3$: $1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Získáme nekonečnou řadu: $4\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16} + \dots$

Platí: $a_1 = 4\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{4}$, součet existuje $|q| < 1$

$$\text{Dosadíme do vzorce: } s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

Př. 7: Vypočti: $2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots$

Na první pohled neřešitelný příklad. Zkusíme přepsat odmocniny jako racionální mocniny:

$$2 \cdot (2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2)^{\frac{1}{4}} \cdot (2)^{\frac{1}{8}} \cdot \dots$$

použijeme vzorec pro součin mocnin: $2 \cdot (2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2)^{\frac{1}{4}} \cdot (2)^{\frac{1}{8}} \cdot \dots = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots}$

V exponentu jsme získali součet nekonečné geometrické řady: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Platí: $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2} \Rightarrow$ řada má součet (platí $|q| < 1$)

$$\text{Určíme součet řady: } s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$2 \cdot (2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2)^{\frac{1}{4}} \cdot (2)^{\frac{1}{8}} \cdot \dots = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots} = 2^2 = 4$$

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots = 4$$

Př. 8: Petáková:

strana 73/cvičení 73 b) f)

strana 73/cvičení 73 b) f)

strana 73/cvičení 74 d)

strana 73/cvičení 75 b) d)

strana 73/cvičení 77 b)

strana 73/cvičení 78 b)

strana 73/cvičení 79

strana 73/cvičení 80

Shrnutí: