9.1.2 Základní kombinatorická pravidla II

Předpoklady: 9101

Př. 1: Urči počet všech čtyřciferných čísel, u kterých se žádná cifra neopakuje.
a) Kolik z nich končí trojkou?
b) Kolik z nich začíná čtyřkou?

Čtyřciferné číslo, kolik možností na jednotlivé cifry?
1. cifra: 9 možností (nemůže tam být nula, zatím nejsme nijak omezeni).
2. cifra: 9 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslici vybranou na první místo).
3. cifra: 8 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslice vybrané na první dvě místa).
4. cifra: 7 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslice vybrané na první tři místa).
Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry $\Rightarrow$ celkový počet čísel: $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 4\,536$.

a) Čtyřciferná čísla, cifry se neopakují, končící trojkou
1. cifra: 8 možností (nemůže tam být nula, ani trojka – schováváme si ji na poslední místo).
2. cifra: 8 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslici vybranou na první místo a trojku).
3. cifra: 7 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslice vybrané na první dvě místa a trojku).
4. cifra: 1 možnost (trojka, nutná podle zadání).
Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry $\Rightarrow$ celkový počet čísel: $8\cdot 8\cdot 7\cdot 1 = 448$.

b) Čtyřciferná čísla, cifry se neopakují, začínají čtyřkou
1. cifra: 1 možnost (čtyřka).
2. cifra: 9 možností (všechna čísla kromě čtyřky).
3. cifra: 8 možností (nemůžeme použít čtyřku a číslici vybranou na druhé místo).
4. cifra: 7 možností (nemůžeme použít čtyřku a číslice vybrané na druhé a třetí místo).
Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry $\Rightarrow$ celkový počet čísel: $1\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 504$.

Vrátíme se na chvíli na začátek k nejjednodušším příkladům.

Př. 2: Ve třídě je 17 děvčat a 13 kluků. Kolika způsoby může třída vybrat jednoho zástupce do školní rady?

Vybíráme jednu studentku ze 17 nebo jednoho kluka ze 13 $\Rightarrow$ dohromady $17+13=30$ možností (více než logické, když má třída 30 studentů).

Př. 3: První ročníky jsou obsazeny takto: 1.A 30 studentů, 1.B 33 studentů, 1.C 30 studentů a 5.O 22 studentů. Kolika způsoby je možné vybrat jednoho zástupce 1. ročníků v poradním orgánu ředitele školy?

Stejné jako předchozí příklad: máme celkem $30+33+30+22$ možností.

Př. 4: Najdi společné rysy předchozích příkladů.

Vybírali jsme jeden prvek z více množin.
Žádný prvek nebyl ve dvou množinách.

Pedagogická poznámka: Toho, že množiny mají prázdné průniky si studenti většinou nevšimnou, nemá cenu řešení příkladu příliš protahovat.

Oba předchozí příklady mají společné rysy:

- vybírali jsme jeden prvek ze sjednocení několika množin,
- množiny, ze kterých jsme vybírali, jsou **disjunktní** (žádný prvek není ve dvou množinách, množiny mají prázdné průniky).

$\Rightarrow$ Počet možností, kterými můžeme získat výsledek, určíme jako součet možností výběru z jednotlivých množin (vybereme množinu a z ní pak prvek).
Při tomto postupu jsme používali **kombinatorické pravidlo součtu**.

> Jsou-li $A_1, A_2, ..., A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, ..., p_n$ prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + ... + p_n$.

Požadavek na disjunktnost množin je strašně důležitý, jeho opomenutí pravidelně ústí do katastrof.

Kombinatorické pravidlo součtu nemusíme používat pouze k zjišťování počtu prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ (sjednocení). Často pomocí počtu prvků sjednocení určujeme počet prvků některé z podmnožin.

Př. 5: Urči počet přirozených dvojciferných čísel s různými ciframi:
a) pomocí pravidla kombinatorického součinu
b) pomocí pravidla kombinatorického součtu

a) pomocí pravidla kombinatorického součinu
Sestavujeme uspořádané dvojice:
1. cifra: 9 možností (nemůže tam být nula, zatím nejsme nijak omezeni)
2. cifra: 9 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslici vybranou na první místo)
Celkově možností: $9 \cdot 9 = 81$.

b) pomocí pravidla kombinatorického součtu
Dvojciferná čísla = dvojciferná čísla s různými ciframi + dvojciferná čísla se stejnými ciframi:

- počet dvojciferných čísel: 90,
- počet dvojciferných čísel se stejnými ciframi: 9 (11, 22, …, 99),

$\Rightarrow$ počet dvojciferných čísel s různými ciframi = $90 - 9 = 81$.

Pedagogická poznámka: Vtipálci budou protestovat, že jsme nepoužili pravidlo kombinatorického součtu, ale pravidlo kombinatorického rozdílu.

Př. 6: Ve třídě je 17 děvčat a 13 kluků. Urči, kolika způsoby je možné zvolit ze studentů třídy samosprávu (předsedu a místopředsedu)?

U volby předsedy a místopředsedy není důležité pohlaví $\Rightarrow$ vybíráme z 30 studentů:

- předseda: 30 možností,
- místopředseda : 29 možností (předseda už nemůže být zvolen),

$\Rightarrow$ celkem možností: $30 \cdot 29 = 870$.

Př. 7: Ve třídě je 17 děvčat a 13 kluků. Vysvětli, jak popisuje výběr předsedy a místopředsedy tento vztah: $17 \cdot 16 + 17 \cdot 13 + 13 \cdot 17 + 13 \cdot 12 = 870$.

Vybíráme ze 17 holek $\Rightarrow$ první část $17 \cdot 16$ vyjadřuje počet možností jak vybrat předsedu i místopředsedu pouze z holek.
Vybíráme ze 13 kluků $\Rightarrow$ poslední část $13 \cdot 12$ vyjadřuje počet možností jak vybrat předsedu i místopředsedu pouze z kluků.
$17 \cdot 13$ - předseda holka, místopředseda kluk.
$13 \cdot 17$ - předseda kluk, místopředseda holka.
Vztah vyjadřuje počet možností tím, že je rozdělil podle pohlaví vybraných funkcionářů.

Př. 8: Ve třídě je 16 děvčat a 14 kluků. Urči, kolika způsoby je možné zvolit ze studentů třídy samosprávu tak, aby v ní byl jeden kluk a jedna dívka.

Postupujeme podobně jako v předchozím případě, dvě možnosti:

- předseda holka, místopředseda kluk: $16 \cdot 14$ možností,
- předseda kluk, místopředseda holka: $14 \cdot 16$ možností,

$\Rightarrow$ celkem $16 \cdot 14 + 14 \cdot 16 = 2 \cdot 16 \cdot 14 = 448$ možností.

Př. 9: Ve třídě je 18 dívek a 11 chlapců. Kolika způsoby je možné vybrat předsedu a místopředsedu tak, aby alespoň jedním z nich byla dívka?

Dva způsoby řešení.
Vybíráme předsedu a místopředsedu tak, aby alespoň jedním z nich byla dívka:

- předseda holka, místopředseda kluk: $18 \cdot 11$ možností,
- předseda kluk, místopředseda holka: $11 \cdot 18$ možností,
- předseda holka, místopředseda holka: $18 \cdot 17$ možností,

$\Rightarrow$ celkem $18 \cdot 11 + 11 \cdot 18 + 18 \cdot 17 = 702$ možností.
Všechny možnosti výběru = ani jedna není dívka + alespoň jedna dívka:

- předseda kdokoliv, místopředseda kdokoliv: $29 \cdot 28$ možností,
- předseda kluk, místopředseda kluk: $11 \cdot 10$ možností,

$\Rightarrow$ alespoň jedna dívka: $29 \cdot 28 - 11 \cdot 10 = 702$ možností.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je nutné vyčíslit, aby studenti viděli, že oba postupy vedou po vyčíslení zcela rozdílných výrazů ke stejnému výsledku.

Př. 10: Barvy na monitoru jsou vytvářeny smícháním tří barev (RGB – červená, zelená, modrá). Jas každé z nich můžeme měnit od 0 do 255. Kolik barev je na monitoru možné vytvořit?

Každá barva je definovaná pomocí uspořádané trojice čísel (každé číslo udává jas jedné barvy. Pro každou ze tří barev máme 256 možností.
Celkem $256 \cdot 256 \cdot 256 = 16\,777\,216$ možností jak definovat barvu $\Rightarrow$ stejné množství barev.

Př. 11: Při hře „Člověče nezlob se“ hází hráč šestistěnnou kostkou. Pokud hodí šestku, hází ještě jednou, pokud hodí šestku i podruhé, potřetí už nehází.
a) Kolika způsoby může hod dopadnout?
b) Kolika způsoby může hod dopadnout, když hráč nemá nasazenou figurku a může se proto pokusit o hození první šestky celkem třikrát? Rozlišujeme čísla, která jsme hodili v jednotlivých hodech.

a) Kolika způsoby může hod dopadnout?
Počet možností, jak může hod proběhnout, nemůžeme určit najednou (když hodíme šestku házíme ještě jednou) $\Rightarrow$ dvě možnosti:

- nehodíme šestku: 5 možností,
- hodíme šestku: $1 \cdot 6$ možností,

$\Rightarrow$ celkem $5 + 6 = 11$ možností.

b) Kolika způsoby může hod dopadnout, když hráč nemá nasazenou figurku a může se proto pokusit o hození první šestky celkem třikrát?
Stejně jako v předchozím bodě budeme určovat počty možností podle toho, ve kterém hodu ze tří možných padne šestka:
šestka padne v prvním hodu: $1 \cdot 6$ možností,
šestka padne ve druhém hodu: $5 \cdot 1 \cdot 6$ možností,
šestka padne ve třetím hodu: $5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 6$ možností,
šestka nepadne vůbec: $5 \cdot 5 \cdot 5$
$\Rightarrow$ celkem $1 \cdot 6 + 5 \cdot 1 \cdot 6 + 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 6 + 5 \cdot 5 \cdot 5 = 311$ možností.

Př. 12: Bod a) předchozího příkladu bývá občas špatně řešen takto: „Hod kostkou může dopadnout 12 různými způsoby, protože může padnout jedna z 12 hodnot (celkem hozený počet může být od 1 do 12)“. Oprav předchozí úvahu.

Není pravda, že mohou padnout všechna čísla od 1 do 12. Pokud nehodíme v prvním hodu šestku, můžeme hodit pouze čísla od 1 do 5. Pokud hodíme šestku, hodíme celkem číslo od 7 do 12. Tah nemůže skončit hodnotou 6 (při opakovaném hodu po šestce nemůžeme hodin 0) $\Rightarrow$ můžeme hodit jednu z 11 hodnot $\Rightarrow$ 11 možností, jak může hod dopadnout.

Př. 13: Petáková:
strana 145/cvičení 34
strana 145/cvičení 36

Shrnutí: Pokud počet možností při výběru závisí na konkrétním prvku, který jsme již vybrali, rozdělíme si odvození na více částí a počty možností sečteme (pravidlo součtu).