9.1.4 Variace I

Předpoklady: 9101, 9102

Př. 1: Sportovního turnaje se účastní 6 týmů. Kolika způsoby mohou tyto týmy obsadit medailová místa v konečném umístění?

Vybíráme jednotlivé týmy na medailové pozice:
1. místo: 6 možností,
2. místo: 5 možností (jeden tým už je vybrán na první místo),
3. místo: 4 možnosti (dva týmy na lepších pozicích),
jednotlivé výběry můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$ počet možností vynásobíme $\Rightarrow$ celkový počet možností: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Př. 2: Na maturitním plese se 10 hlavních cen v tombole losuje z 250 lístků. Kolika způsoby může toto losování dopadnout?

Stejný postup jako v předchozím příkladě:
1. cena: 250 možností,
2. cena: 249 možností,
…
10. cena: 241 možností.
Jednotlivé výběry můžeme kombinovat $\Rightarrow$ násobíme.
Losování může dopadnou $250 \cdot 249 \cdot 248 \cdot ... \cdot 242 \cdot 241 = 794726491016623445280000$ (přibližně $7{,}95 \cdot 10^{23}$) způsoby.

Př. 3: Na zkoušení jsou připraveny dvě otázky (otázky nejsou stejné) a studenti jsou losováni náhodně. Kolika způsoby může losování dopadnout, pokud je ve třídě 31 studentů?

Stejný postup jako v předchozích příkladech:
1. otázka: 31 možností,
2. otázka: 30 možností,
Možnosti můžeme kombinovat $\Rightarrow$ losování může dopadnou $31 \cdot 30 = 930$ způsoby.

Př. 4: Najdi společné rysy všech předchozích příkladů.

Všechny předchozí příklady jsou skoro stejné:
- máme *n* prvků,
- z nich vybíráme několik (*k*) prvků,
- z prvků sestavujeme *k*-tici,
- záleží na pořadí,
- prvky se neopakují.

k-tice, které jsme sestavovali, se nazývají ***k*-členné variace.**

k-členná variace z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Př. 5: Urči počet *k*-členných variací z *n* prvků.

Vytváříme uspořádanou *k*-tici z *n* prvků:
1. člen: n možností,
2. člen: $n-1$ možností,
3. člen: $n-2$ možností, (vždy odečítáme od *n* číslo o jedna menší než kolikátý je člen)
…
$(k-1)$-ní člen: $n-(k-2)$,
k-tý člen: $n-(k-1)$.
Možnosti kombinujeme: $n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))=n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Pedagogická poznámka: Většina studentů sestaví výraz: $n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)$, nejdříve je pouze upozorňuji, aby si přepočítali počet členů.

Počet *k*-členných variací z *n* prvků značíme $V_k(n)$ nebo $V(k,n)$. Někdy se také označuje jako variační číslo.

Pedagogická poznámka: V dalším textu budeme důsledně používat pouze zápis $V_k(n)$. Je podle mě logičtější než v nových učebnicích požívaný zápis $V(k,n)$. Zápis $V_k(n)$ lépe koresponduje se zápisem permutací $P(n)$. Žákům říkám, že v závorce vždy uvádíme počet prvků, ze kterých vybíráme, a jako index píšeme, kolik prvků vybíráme.

Počet $V_k(n)$ *k*-členných variací z *n* prvků je
$V_k(n)=n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Př. 6: Rozepiš a vypočti.
a) $V_3(4)$ b) $V_1(40)$ c) $V_3(3)$

a) $V_3(4)=4\cdot3\cdot2=24$
b) $V_1(40)=40$
c) $V_3(3)=3\cdot2\cdot1=6$

Poznámka: Zápis $n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ neznamená, že musíme dosazovat takto: $V_3(4)=4\cdot(4-1)\cdot(4-2)=4\cdot3\cdot2=24$. Samozřejmě je jednodušší ihned psát $V_3(4)=4\cdot3\cdot2=24$, protože píšeme postupně součin čím dál menších čísel.

Pedagogická poznámka: Kromě toho, že někteří studenti dosazují zbytečně složitě (předchozí poznámka), zjistíte, že někteří nechápou zcela význam písmene *k* a objevují se zápisy: $V_3(4)=4\cdot3\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Př. 7: Máme množinu se čtyřmi prvky: $M = \{a;b;c;d\}$. Vypiš všechny dvoučlenné variace sestavené z těchto čtyř prvků. Urči jejich počet pomocí vzorce.

Vypisujeme variace, přehledně podle prvního prvku:
(a,b), (a,c), (a,d)

(b,a), (b,c), (b,d)

(c,a), (c,b), (c,d)

(d,a), (d,b), (d,c)

Počet variací pomocí vzorce: $V_2(4) = 4 \cdot 3 = 12 \;\Rightarrow$ odpovídá.

Pedagogická poznámka: Je zajímavé, že teprve v tomto okamžiku (i přesto, že v mnoha předcházejících příkladech jsme zmiňovali, že záleží na pořadí) začnou někteří studenti řešit, zda jsou dvojice (a,b) a (b,a) z hlediska zadání stejné nebo ne.

Jinak je samozřejmě nutné zdůraznit, že při vypisování „všech možností“ je nutné postupovat systematicky (jedině tak je šance na nic nezapomenout) a že i systém zápisu „obdélníku“ může pomoci jednak při kontrole úplnosti nebo při závěrečném určování počtu všech možností.

Př. 8: Zapiš výsledky příkladů 1. až 3. pomocí variačních čísel.

Příklad 1: $6 \cdot 5 \cdot 4 = V_3(6)$.

Příklad 2: $250 \cdot 249 \cdot 248 \cdot ... \cdot 242 \cdot 241 = V_{10}(250)$.

Příklad 3: $31 \cdot 30 = V_2(31)$.

Př. 9: K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.
a) Urči počet všech vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.
b) Kolik vlajek má modrý pruh uprostřed?
c) Kolik vlajek má modrý pruh?
d) Kolik vlajek nemá uprostřed modrý pruh?
e) Kolik vlajek nemá žlutý pruh?

Celkem máme k dispozici 5 barev.
a) Urči počet všech vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.
Sestavujeme uspořádanou trojici (záleží který z pruhů má kterou barvu) z pěti prvků, tedy 3-člennou variaci z pěti prvků. Počet takových vlajek: $V_3(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

b) Kolik vlajek má modrý pruh uprostřed?
Modrý pruh uprostřed $\Rightarrow$ vybíráme dvě barvy na volné pruhy $\Rightarrow$ $V_2(4) = 4 \cdot 3 = 12$ možností.

c) Kolik vlajek má modrý pruh?
K modrému pruhu na vlajce musíme vybrat dvě barvy ze čtyř zbývajících do dvou volných pruhů $\Rightarrow$ $V_2(4)$ možností.

Všechny uvedené možnosti můžeme vystřídat s jedním ze tří možných umístění modrého pruhu $\Rightarrow$ počet možností: $3 \cdot V_2(4) = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$.

d) Kolik vlajek nemá uprostřed modrý pruh?
Všechny vlajky můžeme rozdělit do dvou množin: vlajky s modrým pruhem uprostřed + vlajky bez modrého pruhu uprostřed $\Rightarrow$ vlajky bez modrého pruhu uprostřed = všechny vlajky – vlajky s modrým pruhem uprostřed = $60 - 12 = 48$.
Příklad můžeme spočítat i přímo.
Vlajky bez modrého pruhu uprostřed jsou tří druhů:
vlajky s modrým pruhem nahoře: $V_2(4) = 4 \cdot 3$ (vybíráme barvy do dvou volných pruhů),
vlajky s modrým pruhem dole: $V_2(4) = 4 \cdot 3$ (vybíráme barvy do dvou volných pruhů),
vlajky bez modrého pruhu: $V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (sestavujeme vlajku bez modré barvy),
$\Rightarrow$ dohromady: $V_2(4) + V_2(4) + V_3(4) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$.

e) Kolik vlajek nemá žlutý pruh?
Vlajek se žlutým pruhem je $3 \cdot V_2(4) = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ (stejně jako vlajek s modrým).
Vlajky bez žlutého pruhu = všechny vlajky – vlajky se žlutým pruhem = $60 - 36 = 24$.
Jinak: vlajka bez žlutého pruhu = vlajka sestavovaná ze čtyř zbývajících barev $\Rightarrow$
$V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Pedagogická poznámka: Občas se objevují i jiné způsoby řešení, vždy je potřeba dojít k jednoznačnému rozhodnutí, zda je dotyčný způsob správně nebo špatně (a pokud je špatně, je nutné zdůvodnit proč. Porovnání výsledného počtu nestačí).

Př. 10: Petáková:
strana 146/cvičení 38
strana 146/cvičení 40
strana 146/cvičení 43

Shrnutí: