9.1.5 Variace II

Předpoklady: 9104

Př. 1: Vyřeš rovnici $V_3(n)-V_3(n-1)=216$.

Dosadíme z definice variačního čísla a vyřešíme rovnici.

$V_3(n)-V_3(n-1)=216$

$n(n-1)(n-2)-(n-1)(n-2)(n-3)=216$

$(n-1)(n-2)\left[n-(n-3)\right]=216$

$(n^2-2n-n+2)3=216 \qquad /:3$

$n^2-3n+2=72$

$n^2-3n-70=0$

$(n-10)(n+7)=0$

$n_1=10$

$n_2=-7$ - není řešením rovnice, nemůžeme vybírat z –7 prvků.

$K=\{10\}$

Pedagogická poznámka: Vytknutí závorek je hezkou ukázkou značné úspory při počítání, ke které může vést chvilka zamyšlení (děkujeme Aničce). Asi není od věci žáky popostrčit tím, že jim prozradíte, že není nutné všechno otrocky roznásobovat.

Př. 2: Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků o 22. Urči původní počet prvků?

Počet variací druhé třídy z hledaného počtu prvků $\Rightarrow$ v zadání se mluví zřejmě o dvoučlenných variacích.
Původní počet prvků: *n*.

$V_2(n)=n\cdot(n-1) \qquad V_2(n+2)=(n+2)\cdot(n+1)$

Počet variací se zvětší o 22: $V_2(n+2)-V_2(n)=22$.

$(n+2)\cdot(n+1)-n\cdot(n-1)=22$

$n^2+2n+n+2-n^2+n=22$

$4n=20$

$n=5$

Původně jsme měli 5 prvků.

Pedagogická poznámka: V předchozím textu se o variacích *k*-té třídy nemluví (používá se označení *k*-členné variace), přesto část žáků sama rozluští, o čem se v zadání mluví. Se zbývajícím je nutné tento termín probrat (nejednoznačnost terminologie je ovšem běžná, proto je příklad takto zadán úmyslně a žáci by se měli sami pokusit situaci vyřešit).

Vrátíme se k slovním příkladům.

Př. 3: Urči, kolik různých přirozených čtyřciferných čísel je možné sestavit z číslic 1, 2, 3, 4 a 5 (každou číslici můžeme použít pouze jednou).
a) Kolik z nich je dělitelných pěti?
b) Kolik z nich je sudých?
c) Kolik z nich je dělitelných třemi?
d) Kolik z nich je dělitelných šesti?

Počet všech čísel:
Sestavujeme uspořádané čtveřice, vybíráme z pěti prvků $\Rightarrow$ $V_4(5)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$ možností (výsledný výraz můžeme odůvodnit i klasickým: na první místo 5 možností, na druhé místo 4 možnosti, …).

a) Kolik z nich je dělitelných pěti?
Číslo je dělitelné pěti, když končí na 5 nebo 0 (to v našem příkladě nepřipadá do úvahy) vybíráme pouze na první tří místa ze zbývajících číslic $\Rightarrow$ $V_3(4)=4\cdot 3\cdot 2=24$ možností.

b) Kolik z nich je sudých?
Sudé číslo $\Rightarrow$ musí končit na sudou číslici, ostatní číslice volíme stejně jako na začátku příkladu:

- čísla končící na 2 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první tří místa ze zbývajících čtyř číslic $\Rightarrow$ $V_3(4)=4\cdot 3\cdot 2$,
- čísla končící na 4 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první tří místa ze zbývajících čtyř číslic $\Rightarrow$ $V_3(4)=4\cdot 3\cdot 2$.

Sudá čísla mohou končit buď na 2 nebo na 4 $\Rightarrow$ celkový počet možností získáme součtem možností končících na 2 nebo 4 $\Rightarrow$ celkem $4\cdot 3\cdot 2+4\cdot 3\cdot 2=2\cdot 4\cdot 3\cdot 2=48$ možností.

c) Kolik z nich je dělitelných třemi?
Číslo je dělitelné třemi, právě když je jeho ciferný součet dělitelný třemi $\Rightarrow$ kontrolujeme ciferný součin všech čtveřic, které můžeme vybrat:

- $1+2+3+4=10$
- $1+2+3+5=11$
- $1+2+4+5=12$
- $1+3+4+5=13$
- $2+3+4+5=14$

$\Rightarrow$ čísla můžeme sestavovat pouze z číslic 1, 2, 4 a 5 (ciferný součet 12).
Sestavujeme uspořádané čtveřice, vybíráme ze čtyř prvků $\Rightarrow$ $V_4(4)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ možností.

d) Kolik z nich je dělitelných šesti?
Číslo je dělitelné šesti právě, když je dělitelné třemi a dvěma najednou $\Rightarrow$ čísla sestavujeme pouze z číslic 1, 2, 4 a 5 (ciferný součet 12, dělitelnost třemi) a musí končit na 2 nebo 4 (dělitelnost 2):

- čísla končící na 2 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první tří místa ze zbývajících tří číslic $\Rightarrow$ $V_3(3)=3\cdot 2\cdot 1$,
- čísla končící na 4 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první tří místa ze zbývajících čtyř číslic $\Rightarrow$ $V_3(3)=3\cdot 2\cdot 1$,

$\Rightarrow$ celkem $3\cdot 2\cdot 1+3\cdot 2\cdot 1=2\cdot 3\cdot 2\cdot 1=12$ možností.

Pedagogická poznámka: Poměrně častou chybou v bodě b) je výsledek $3\cdot2\cdot1\cdot2$, kde dvojka na posledním místě znamená možnosti výběru ze dvou číslic a trojka na začátku fakt, že jsme na posledním místě vybírali ze dvou čísel. Žáci tak pletou možnosti výběru poslední cifry ze dvou možností s tím, že jsme jednu z těchto dvou cifer vybrali. Pokud si chyby všimnu a vidím, že žák má dopočítané hodnoty, nejdříve ho vyzvu, aby si porovnal své výsledky v bodech a) a b).

Pedagogická poznámka: Hledání cifer do správného ciferného součtu nemusí být takovou nudou, jak na první pohled vypadá. Můžeme využít dva nápady.
Všechny volby čtveřic můžeme najít tak, že z původní pětice vypustíme jednu číslici.
Pokud jako první vypustíme číslici 5, získáme nejmenší ciferný součet 10. Pokud pak postupně vypouštíme číslice 4, 3, 2 a 1, ciferný součet se vždy o jednu zvětšuje. Z toho ihned plyne, že jediným správným bude ten, který vznikne vypuštěním trojky.

Př. 4: Urči počet všech pětimístných lichých přirozených čísel s různými ciframi.

Čísla sestavujeme ze všech deseti číslic. Lichá čísla končí na lichou číslici $\Rightarrow$ 5 možností číslic na posledním místě.
Čísla končící na 1 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první čtyři místa ze zbývajících devíti číslic, ale na první místo máme pouze osm možností (nejde použít nula) $\Rightarrow$ $8\cdot8\cdot7\cdot6$.
Na poslední místo můžeme vybrat celkem pět čísel $\Rightarrow$ celkově $5\cdot8\cdot8\cdot7\cdot6=13440$ možností.

Př. 5: Urči počet všech sudých pětimístných přirozených čísel s různými ciframi. Je jich stejně jako lichých?

Čísla sestavujeme ze všech deseti číslic. Sudá čísla končí na sudou číslici, nemůžeme řešit všechny možnosti najednou, protože na první místo čísla nemůžeme dát nulu.

- čísla končící na 0 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první čtyři místa ze zbývajících devíti číslic (použít můžeme každé z nich, protože nula je na posledním místě) $\Rightarrow$ $V_4(9)=9\cdot8\cdot7\cdot6$
- čísla končící na 2 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první čtyři místa ze zbývajících devíti číslic, ale na první místo máme pouze osm možností (nejde použít nula) $\Rightarrow$ $8\cdot8\cdot7\cdot6$
- stejný počet možností máme i u dalších sudých čísel 4, 6, 8

Čísla končící na nulu $9\cdot8\cdot7\cdot6$, čísla končící na zbývající sudé číslice: $4\cdot8\cdot8\cdot7\cdot6$
Celkem: $9\cdot8\cdot7\cdot6+4\cdot8\cdot8\cdot7\cdot6=13776$ možností.
Sudých pětimístných přirozených čísel s různými ciframi je více než lichých (protože u čísel s nulou na konci máme větší počet možností, jak vybrat první cifru).

Pedagogická poznámka: Občas je možné se setkat s tím, že obě předchozí skupiny jsou stejně početné a počty jejich prvků je možné získat tím, že spočteme všechna přirozená pětimístná čísla s různými ciframi a výsledek vydělíme dvěma. Není to pravda, což je možné ověřit i zcela manuálně na dvojciferných číslech (kterých je s nulou na konci 9, zatímco s jinými ciframi pouze 8).

Př. 6: Petáková:
strana 146/cvičení 37

Shrnutí: