

## 9.1.6 Permutace I

**Předpoklady:** 9101, 9102, 9104

**Pedagogická poznámka:** První tři příklady jsou opakování, je možné je přeskočit, nebo použít na zkoušení.

**Př. 1:** Vyřeš slovní úlohy.

a) Na plese se losuje 5 různých nejskvělejších cen z 300 lístků. Kolika způsoby může losování dopadnout?

b) Do závodu odstartovalo 23 závodníků. Kolika způsoby se mohou závodníci umístit na prvních šesti bodovaných místech?

a) Na plese se losuje 5 různých nejskvělejších cen z 300 lístků. Kolika způsoby může losování dopadnout?

Vybíráme 5 z 300, záleží na pořadí  $\Rightarrow V_5(300) = 300 \cdot 299 \cdot 298 \cdot 297 \cdot 296 \doteq 2,35 \cdot 10^{12}$  možností.

b) Do závodu odstartovalo 23 závodníků. Kolika způsoby se mohou závodníci umístit na prvních šesti bodovaných místech?

Vybíráme 6 z 23, záleží na pořadí  $\Rightarrow V_6(23) = 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 72\,681\,840$  možností.

**Př. 2:** Rozepiš.

a)  $V_3(n+1)$

b)  $V_2(k-1)$

a)  $V_3(n+1) = (n+1) \cdot n \cdot (n-1)$

b)  $V_2(k-1) = (k-1)(k-2)$

**Př. 3:** Z množiny dnů v týdnu vytvoř:

a) jednu trojčlennou variaci,

b) dvě dvojčlenné variace.

a) jedna trojčlenná variace

Jakákoliv uspořádaná trojice dnů: {neděle, pátek, úterý}.

b) dvě dvojčlenné variace

Jakékoliv dvě uspořádané dvojice dnů: {pátek, úterý}, {neděle, středa}.

**Př. 4:** Sportovního turnaje se účastní 5 družstev. Kolik existuje možných konečných pořadí?

Budeme postupně sestavovat pořadí:

1. místo ... 5 možností

2. místo ... 4 možnosti (jeden tým už má určené pořadí)

3. místo ... 3 možnosti (dva týmy už mají určené pořadí)

4. místo ... 2 možnosti (tři týmy už mají určené pořadí)

5. místo ... 1 možnost (čtyři týmy už mají určené pořadí)  
⇒ jakoukoliv možnost můžeme kombinovat s ostatními ⇒ násobíme mezi sebou ⇒ celkem existuje  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  možností, jak může vypadat konečné pořadí (vlastně jde o vytváření uspořádané pětice z pěti prvků).

**Př. 5:** Kolika způsoby se může seřadit při rozlosování do řady 10 dětí na letním táboře?

Děti, které stavíme do řady, budeme postupně vybírat na místa v řadě:

1. místo ... 10 možností,  
2. místo ... 9 možností (jedno dítě už je vybráno),  
3. místo ... 8 možností (dvě děti už jsou vybrány),  
...  
9. místo ... 2 možnosti (osm dětí je vybraných),  
10. místo ... 1 možnost (devět dětí už je vybraných).

⇒ Jakoukoliv možnost můžeme kombinovat s ostatními ⇒ násobíme mezi sebou ⇒ celkem existuje  $10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$  možností, jak může vypadat konečné pořadí (vlastně jde o vytváření uspořádané desetice z deseti prvků).

**Př. 6:** Tři obětovaní studenti losují o pořadí, ve kterém se nechají „dobrovolně“ vyzkoušet. Kolika způsoby může losování skončit?

Stejně jako předchozí příklady, vybíráme postupně na jednotlivá místa v pořadí:

1. místo ... 3 možnosti,  
2. místo ... 2 možnosti (jeden student vybrán),  
3. místo ... 1 možnost (dva studenti vybráni).

⇒ Jakoukoliv možnost můžeme kombinovat s ostatními ⇒ násobíme mezi sebou ⇒ celkem existuje  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  možností, jak může vypadat konečné pořadí (vlastně jde o vytváření uspořádané trojice ze tří prvků).

**Př. 7:** Najdi společné rysy tří předchozích příkladů.

Všechny předchozí příklady jsou skoro stejné:

- máme  $n$  prvků,
- z nich postupně vybíráme  $n$  prvků,
- z prvků sestavujeme  $n$ -tici,
- záleží na pořadí,
- prvky se neopakují,

$n$ -tice, které jsme sestavovali, se nazývají **permutace z  $n$  prvků**.

Permutace z  $n$  prvků je uspořádaná  $n$ -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

**Př. 8:** Jaký je vztah mezi permutacemi z  $n$  prvků a variacemi?

- Permutace: z  $n$  prvků sestavujeme upořádanou  $n$ -tici (používáme všechny prvky právě jednou),
- Variace: z  $n$  prvků sestavujeme upořádanou  $k$ -tici (používáme některé prvky maximálně jednou),

⇒ permutace je speciální případ variace ( $n$  členné variace z  $n$  prvků).

**Permutace z  $n$  prvků je každá  $n$ -členná variace z těchto prvků.**

**Př. 9:** Urči počet permutací z  $n$  prvků.

Vytváříme uspořádanou  $n$ -tici z  $n$  prvků:

1. člen:  $n$  možností,
2. člen:  $n-1$  možností,
3. člen:  $n-2$  možností,

...

$(n-1)$ -ní člen: 2,

$n$ -tý člen: 1.

Možnosti kombinujeme:  $n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ .

Mohli bychom také použít variační číslo:  $V_n(n) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+1) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$ .

Počet permutací z  $n$  prvků značíme  $P(n)$ .

Součin  $n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  patří v kombinatorice k nejběžnějším ⇒ zavádíme pro něj speciální symbol  $n!$  (čteme  $n$  faktoriál).

Pro každé přirozené číslo  $n$  definujeme  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

Počet  $P(n)$  všech permutací z  $n$  prvků se rovná  $P(n) = n!$ .

Hodnota faktoriálu je definována i pro nulu. Platí:  $0! = 1$ .

**Pedagogická poznámka:** Hodnota faktoriálu je pro studenty překvapivá, více se dozví příští hodinu.

Většina kalkulaček má speciální tlačítko pro faktoriál.

**Př. 10:** Rozepiš a vypočti:

- a)  $P(5)$     b)  $P(1)$     c)  $P(3)$     d)  $4!$     e)  $50!$

a)  $P(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b)  $P(1) = 1$

c)  $P(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

d)  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

e)  $50! = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$

$= 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000$

Faktoriály jsou velmi brzo velmi velká čísla.

**Př. 11:** Vypiš všechny permutace ze tří prvků  $\{a; b; c\}$ .

Vypisujeme přehledně podle prvního prvku:

$(a, b, c), (a, c, b)$

$(b, a, c), (b, c, a)$

$(c, a, b), (c, b, a)$

Počet permutací pomocí vzorce:  $P(3) = 3! = 6 \Rightarrow$  odpovídá.

**Pedagogická poznámka:** Jako nejvýhodnější vidím společné (pomalé a po krocích, ale bez delšího čekání na samostatný nápad studentů) vyřešení příkladu 8 a poté samostatnou práci na příkladu 9.

**Př. 12:** Televizního pořadu, ve kterém diváci kladou politikům nepříjemné otázky, se účastní i občané Nora, Oldřich, Pavlína, Radek, Stanislav, Tamara a Uršula. Každý účastník může položit jednu otázku. Urči počet všech možných pořadí, ve kterých:

- a) mohou položit své dotazy,
- b) položí dotazy nejdříve ženy a pak muži,
- c) položí svůj dotaz Pavlína a hned po ní Radek,
- d) Nora položí svůj dotaz dříve než Tamara.

a) všechna pořadí, ve kterých mohou položit své dotazy

Stejný příklad jako všechny na začátku:  $P(7) = 7! = 5040$ .

b) všechna pořadí, ve kterých položí dotazy nejdříve ženy a pak muži

- Otázky pokládají 4 ženy  $\Rightarrow 4!$  možností, jak je seřadit,
- otázky pokládají 3 muži  $\Rightarrow 3!$  možností, jak je seřadit,

ke každému pořadí žen můžeme vystřídat všechna pořadí mužů a obráceně  $\Rightarrow$  počty možností mezi sebou násobíme  $\Rightarrow 4! \cdot 3! = 144$  možností.

c) všechna pořadí, ve kterých položí svůj dotaz Pavlína a hned po ní Radek

Pavlínu a Radka můžeme považovat za jediného účastníka diskuse  $\Rightarrow$  diskuse se účastní 6 tazatelů  $\Rightarrow 6! = 720$  možností.

d) všechna pořadí, ve kterých Nora položí svůj dotaz dříve než Tamara

Každému pořadí, ve kterém položila Nora dotaz před Tamarou, odpovídá jedno pořadí, ve kterém pouze prohodíme tyto dvě ženy a Tamara bude klást dotaz před Norou  $\Rightarrow$  hledaná

pořadí tvoří přesně polovinu všech  $\Rightarrow$  je jich  $\frac{7!}{2} = 2520$ .

**Př. 13:** Šíleně smutnou princeznu přišlo rozesmát 20 kejklířů, 35 komiků, 41 šašků, 27 zpěváků, 12 bavičů, Zlatovláska, Kocour v botách a Hloupý Honza. Urči počet všech pořadí, ve kterých mohou před princeznu předstoupit:

- a) všichni uchazeči,
- b) pouze kejklíři a šašci,
- c) pouze komici a po nich zpěváci,
- d) nejdříve všichni baviči,
- e) každá skupina uchazečů pohromadě, pohádkové bytosti na konci,
- f) první Zlatovláska, druhý Kocour v botách a třetí Hloupý Honza,
- g) všichni uchazeči tak, aby byl Hloupý Honza byl první nebo druhý,
- h) všichni uchazeči tak, aby Kocour botách nebyl první,
- i) všichni uchazeči tak, aby Hloupý Honza byl nejhůře desátý,
- j) Zlatovláska před Hloupým Honzou a Kocourem v botách ostatní libovolně.

a) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit všichni uchazeči

Celkově uchazečů  $20 + 35 + 41 + 27 + 12 + 1 + 1 + 1 = 138$ .

Všech 138 uchazečů se snažíme uspořádat, každého vybíráme pouze jednou na pořadí záležit

$\Rightarrow 138! \doteq 6,9 \cdot 10^{236}$  možností.

b) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit pouze kejklíři a šašci

- Počet kejklířů a šašků:  $20 + 41 = 61$ .

Upořádáme 61 uchazečů:  $61! \doteq 5,1 \cdot 10^{83}$  možností.

c) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit pouze komici a po nich zpěváci

- Počet pořadí komiků:  $35!$ ,
- počet pořadí zpěváků:  $27!$ ,

ke každému pořadí komiků můžeme vyzkoušet všechna pořadí zpěváků  $\Rightarrow$  násobíme mezi sebou  $\Rightarrow 35! \cdot 27! \doteq 1,1 \cdot 10^{68}$  možností.

d) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit nejdříve všichni baviči

- Počet pořadí bavičů:  $12!$ ,
- počet pořadí ostatních uchazečů:  $(138 - 12)! = 126!$ ,

ke každému pořadí bavičů můžeme vyzkoušet všechna pořadí ostatních uchazečů  $\Rightarrow$  násobíme mezi sebou  $\Rightarrow 12! \cdot 126! \doteq 1,5 \cdot 10^{224}$  možností.

e) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit každá skupina uchazečů pohromadě, pohádkové bytosti na konci

- Počet pořadí kejklířů:  $20!$ ,
- počet pořadí komiků:  $35!$ ,
- počet pořadí šašků:  $41!$ ,
- počet pořadí zpěváků:  $27!$ ,
- počet pořadí bavičů:  $12!$ ,
- počet pořadí pohádkových bytostí:  $3!$ ,

ke každému pořadí jedné skupiny můžeme vyzkoušet všechna pořadí ostatních skupin  $\Rightarrow$  násobíme mezi sebou  $\Rightarrow 20! \cdot 35! \cdot 41! \cdot 27! \cdot 12! \cdot 3!$  možností,

máme celkem 5 skupin (pohádkové bytosti jsou poslední, nikam je nepřerazujeme), jejichž pořadí můžeme měnit  $5!$  způsoby  $\Rightarrow 5! \cdot 20! \cdot 35! \cdot 41! \cdot 27! \cdot 12! \cdot 3! \doteq 1,9 \cdot 10^{148}$  možností.

f) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit první Zlatovláska, druhý Kocour v botách a třetí Hloupý Honza

Na prvních třech místech nemáme možnost volby, uspořádáváme pouze zbývajících 135 uchazečů  $\Rightarrow 135! \doteq 2,7 \cdot 10^{230}$  možností.

g) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit všichni uchazeči tak, aby byl Hloupý Honza byl první nebo druhý

- Hloupý Honza první  $\Rightarrow$  uspořádáváme zbývajících 137 uchazečů  $\Rightarrow 137!$  možností,
- Hloupý Honza druhý  $\Rightarrow$  uspořádáváme zbývajících 137 uchazečů (po uspořádání k nim přidáme za prvního Honzu)  $\Rightarrow 137!$  možností.

Honza můžeme být buď první nebo druhý  $\Rightarrow$  předchozí možnosti sčítáme  $\Rightarrow$  celkově  $137! + 137! = 2 \cdot 137! \doteq 1,0 \cdot 10^{235}$  možností.

h) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit všichni uchazeči tak, aby Kocour botách nebyl první

Všechna pořadí ( $138!$  možností) = pořadí, ve kterých je Hloupý Honza první ( $137!$  možností) + pořadí, ve kterých Hloupý Honza první není  $\Rightarrow$  pořadí, ve kterých Hloupý Honza první není:  $138! - 137! = 137!(138 - 1) = 137 \cdot 137! \doteq 6,9 \cdot 10^{236}$  možností.

i) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit všichni uchazeči tak, aby Hloupý Honza byl nejhůře desátý,

Počet možností, ve kterých je Hloupý Honza na libovolném předem určeném místě:  $137!$  možností, Honza může nastoupit na deseti vyhovujících pořadích  $\Rightarrow$  celkově  $10 \cdot 137! \doteq 5,0 \cdot 10^{235}$  možností.

j) počet všech pořadí, ve kterých může předstoupit Zlatovláska před Hloupým Honzou a Kocourem v botách ostatní libovolně

Každému pořadí ve kterém je Zlatovláska před Hloupým Honzou, odpovídá jedno pořadí, ve kterém je Hloupý Honza před Zlatovláskou (obě pořadí můžeme zaměnit vzájemným prohozením)  $\Rightarrow$  Zlatovláska před Honzou  $\frac{138!}{2}$  možností.

Všech zatím vyhovujících pořadí můžeme opět rozdělit na dvě stejně velké skupiny, podle toho

zda je dříve Zlatovláska nebo Kocour v botách  $\Rightarrow \frac{138!}{2} = \frac{138!}{4} = 1,7 \cdot 10^{236}$  možností.

**Př. 14:** Petáková:

strana 146/cvičení 47

strana 146/cvičení 48

**Shrnutí:** Pokud tvoříme z  $n$  prvků uspořádané  $n$ -tice máme  $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  možností.