9.1.7 Permutace II

Předpoklady: 9106

Př. 1: Rozepiš faktoriály. a) $6!$ b) $n!$ c) $(n+1)!$ d) $(n-2)!$

a) $6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ b) $n!=n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$

c) $(n+1)!=(n+1)\cdot n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$ d) $(n-2)!=(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$

Pedagogická poznámka: Pokud někdo nedokáže vyřešit první body předchozího příkladu, zaslouží ztrestat.

Př. 2: Zapiš jedním faktoriálem. a) $5\cdot4!$ b) $(n+1)\cdot n!$ c) $\frac{6!}{6\cdot5}$

a) $5\cdot4!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5!$ b) $(n+1)\cdot n!=(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1=(n+1)!$

c) $\frac{6!}{6\cdot5}=\frac{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}}=4\cdot3\cdot2\cdot1=4!$

Př. 3: Zjednoduš a vypočti bez použití kalkulačky.

a) $\frac{8!}{6!}$ b) $\frac{4!}{7!}$ c) $\frac{10!}{7\cdot5!\cdot5!}$ d) $\frac{1}{10!}+\frac{1}{9!}$

a) $\frac{8!}{6!}=\frac{8\cdot7\cdot6!}{6!}=8\cdot7=56$

b) $\frac{4!}{7!}=\frac{4!}{7\cdot6\cdot5\cdot4!}=\frac{1}{7\cdot6\cdot5}=\frac{1}{210}$

c) $\frac{10!}{7\cdot5!\cdot5!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5!}{7\cdot5!\cdot5!}=\frac{10\cdot9\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{7}\cdot6}{\cancel{7}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot1}=\frac{5\cdot2\cdot9\cdot6}{5\cdot3}=36$

d) $\frac{1}{10!}+\frac{1}{9!}=\frac{1}{10!}+\frac{10}{10}\cdot\frac{1}{9!}=\frac{1}{10!}+\frac{10}{10!}=\frac{11}{10!}$

Př. 4: Zjednoduš:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$ b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ c) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!}$ d) $\frac{n+1}{n!}-\frac{2n+1}{(n+1)!}$

a) $\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}=(n+1)\cdot n=n^2+n$

c) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!}=\frac{(n-3)!}{(n-1)(n-2)(n-3)!}=\frac{1}{(n-1)(n-2)}=\frac{1}{n^2-3n+2}$

d) $\frac{n+1}{n!}-\frac{2n+1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)n!}-\frac{2n+1}{(n+1)!}=\frac{n^2+2n+1-2n-1}{(n+1)!}=\frac{n^2}{(n+1)!}$

Faktoriál, který jsme zavedli v minulé hodině, můžeme využít také k přehlednějšímu zápisu variačních čísel.

Zkusíme si upravit třeba $V_4(7)$:

$V_4(7)=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$ - součin připomíná zápis $7!$, ale chybí v něm „konec“ $\Rightarrow$ zkusíme doplnit součin na celý faktoriál vynásobením jedničkou: $V_4(7)=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{7!}{3!}$.

Proč je v čitateli $7!$, chápeme (počet prvků, ze kterých vybíráme). Proč je ve jmenovateli $3!$?

Př. 5: Vyjádři pomocí faktoriálů variační číslo $V_2(7)$ a navrhni význam čísla, jehož faktoriál se nachází ve jmenovateli zlomku.

Stejně jako před okamžikem:

$V_2(7)=7\cdot 6=7\cdot 6\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{7!}{5!}$.

5 ve jmenovateli je zřejmě rozdíl $7-2=5$ (jinak jde o počet prvků, který by nám zbyl do dalšího výběru).

Př. 6: Vyjádří pomocí faktoriálů variační číslo $V_k(n)$.

Stejně jak v předchozím příkladě:

$V_k(n)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{(n-k)!}$

Počet $V_k(n)$ k-členných variací z n prvků je $V_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!}$.

Platí: $P(n)=V_n(n)=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=\frac{n!}{1}=n!$. Kdybychom si nedefinovali $0!=1$ vzorec pro variační čísla by se nedal použít ve všech případech.

Pedagogická poznámka: Při společném řešení následujícího příkladu je třeba neustále upozorňovat, že řešení nacházíme postupně (stejným způsobem, jakým bychom řadu sestavovali v realitě), ne náhlým osvícením.
U bodu c) by měly zaznít oba postupy řešení, aby bylo vidět, že opět různými cestami dospějeme ke stejnému cíli.

Pedagogická poznámka: Stejně jako na konci minulé hodiny se následující příklad řeší napůl společně u tabule a teprve přespříští je určen k zcela samostatné práci.

Př. 7: Urči, kolika způsoby může n táborníků nastoupit na rozcvičku:
a) do řady,
b) do řady, na jejímž kraji stojí táborník Vlčí Dráp,
c) do řady, ve které stojí vedle sebe Vlčí Dráp a Soví Oko,
d) do řady, ve které stojí vedle sebe trojice táborníků Vlčí Dráp, Soví Oko a Medvědí Tlapa,
e) do řady, ve které Vlčí Dráp nestojí vedle Rysího Spáru,
f) do kruhu, v němž záleží pouze na vzájemném umístění táborníků a ne na jejich poloze vzhledem k okolí.

a) do řady
Vybíráme z n prvků postupně n za vytváříme uspořádanou n-tici $\Rightarrow$ vytváříme permutace z n prvků $\Rightarrow$ $n!$ možností.

b) do řady, na jejímž kraji stojí táborník Vlčí Dráp
Nejdříve seřadíme všechny táborníky kromě Vlčího Drápu $\Rightarrow$ řadíme $(n-1)$ táborníků $\Rightarrow$ $(n-1)!$ možností. U každého vytvořené řady můžeme postavit Vlčí Dráp na jeden ze dvou konců $\Rightarrow$ celkově $2(n-1)!$ možností.

c) do řady, ve které stojí vedle sebe Vlčí Dráp a Soví Oko
První způsob řešení:
Vlčí Dráp a Soví Oko mají být vedle sebe $\Rightarrow$ spojíme je a budeme je do řady zařazovat jako jednu osobu $\Rightarrow$ vytváříme řadu z $n-1$ osob $\Rightarrow$ $(n-1)!$ možností, po rozestavení řady máme ještě dvě možnosti, jak postavit vedle sebe Vlčí Dráp a Soví Oko $\Rightarrow$ $2(n-1)!$ možností.
Druhý způsob řešení:
Vlčí Dráp a Soví Oko mají být vedle sebe $\Rightarrow$ postavíme řadu z ostatních táborníků $\Rightarrow$ vytváříme řadu z $n-2$ osob $\Rightarrow$ $(n-2)!$ možností, jak rozestavit táborníky bez Vlčího Drápu a Sovího Oka. Ke každému rozestavení táborníků máme $(n-1)$ možností, kam postavit dvojici Dráp Oko (nalevo od každého z táborníků a pak úplně vpravo) $\Rightarrow$ celkem $(n-1)(n-2)!=(n-1)!$ možností, po rozestavení řady máme ještě dvě možnosti, jak postavit vedle sebe Vlčí Dráp a Soví Oko $\Rightarrow$ $2(n-1)!$ možností.

d) do řady, ve které stojí vedle sebe trojice táborníků Vlčí Dráp, Soví Oko a Medvědí Tlapa
Řešíme analogicky jako v předchozím bodě.
Vlčí Dráp, Soví Oko a Medvědí Tlapa mají být vedle sebe $\Rightarrow$ spojíme je a budeme je do řady zařazovat jako jednu osobu $\Rightarrow$ vytváříme řadu z $n-2$ osob $\Rightarrow$ $(n-2)!$ možností. Na každé rozestavení řady musíme ještě vyzkoušet všechny možnosti, jak vybrané tři táborníky postavíme vedle sebe ($3!$ možností) $\Rightarrow$ $3!\cdot(n-2)!$ možností.

e) do řady, ve které Vlčí Dráp nestojí vedle Rysího Spáru
Vlčí Dráp nestojí vedle Rysího Spáru $\Rightarrow$ hodně možností, které se navzájem liší podle toho, jak jsou táborníci daleko od sebe atd. $\Rightarrow$ místo přímého postupu zkusíme nepřímý: od počtu všech možností seřazení táborníků odečteme možnosti, které nechceme (tedy Vlčí Dráp vedle Rysího Spáru).
Všechny možnosti: $n!$,

Vlčí Dráp vedle Rysího Spáru: $2(n-1)!$ (stejné jako bod c)),

$\Rightarrow$ Vlčí Dráp není vedle Rysího Spáru: $n!-2(n-1)!$.

e) do kruhu, v němž záleží pouze na vzájemném umístění táborníků a ne na jejich poloze vzhledem k okolí
Kruh vytvoříme z uspořádané řady tím, že se krajní táborníci postaví k sobě. Když kruh pootočíme odpovídá jiné řadě, ale z hlediska zadání jde pořád o stejný kruh.

1 2 3 4   2 3 4 1   3 4 1 2   4 1 2 3

Kolikrát můžeme kruh otočit? n-krát $\Rightarrow$ možných kruhů je n-krát méně než řad, tedy $\frac{n!}{n}=(n-1)!$.

Pedagogická poznámka: Ve třídě je rozhodně jednodušší vybrat tři studenty, sestavit kolo a ukázat, jak se z jednoho kola otáčením vytváření různé řady, než něco nesrozumitelně kreslit na tabuli.

Př. 8: Na osobním oddělení velké firmy pracuje jako obyčejný zaměstnanec z žen a m mužů. Počet žen je větší než počet mužů. Kromě nejvyšší vedoucí, která má v mimořádné oblibě hromadné nástupy, má oddělení navíc ještě tři další vedoucí pracovníky, kteří se nepočítají ani mezi muže ani mezi ženy. Urči kolika způsoby je možné:
a) postavit všechny zaměstnance oddělení do řady u příležitosti blahopřání vedoucí k významnému životnímu jubileu,
b) postavit všechny zaměstnance oddělení do řady tak, aby vedoucí pracovníci stáli na začátku řady,
c) postavit všechny zaměstnance oddělení do řady tak, aby vedoucí pracovníci stáli vedle sebe,
d) postavit všechny zaměstnance oddělení do řady tak, aby vedoucí pracovníci, muži i ženy stáli pohromadě,
e) rozestavit obyčejné zaměstnance do řady tak, aby se pravidelně střídaly ženy s muži a zbývající ženy stály pohromadě na tom z krajů řady, kde by jinak stál muž,
f) rozestavit obyčejné zaměstnance podle pohlaví do dvou kruhů ke hraní stmelovací hry „Já jsem šanon, kdo jsi Ty?“,
g) rozestavit kruh, který ve hře „Já jsem šanon, kdo jsi Ty?“, vyhraje, pokud si vedoucí jeden z kruhů z předchozího bodu vybere a stoupne si v něm na libovolné místo,
h) rozestavit všechny zaměstnance kolem kulatého stolu tak, aby vedoucí měla vedle sebe své oblíbence Petru a Josefa
i) rozestavit do jednoho kruhu všechny muže a potřebný počet žen tak, aby se pohlaví pravidelně střídalo.

a) počet možností, jak postavit všechny zaměstnance oddělení do řady u příležitosti blahopřání vedoucí k významnému životnímu jubileu
Na oddělení pracuje celkem $m+z+3$ zaměstnanců, snažíme se je uspořádat do řady $\Rightarrow$ celkem $(m+z+3)!$ možností.

b) počet možností, jak postavit všechny zaměstnance oddělení do řady tak, aby vedoucí pracovníci stáli na začátku řady
Tvorbu řady rozdělíme na dvě části:

- sestavíme řadu z mužů a žen: $(m+z)!$ možností,
- na začátku řady sestavíme řadu z vedoucích pracovníků: $3!$ možností,

každou možnost pro řadu vedoucích pracovníků můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro řadu z obyčejných pracovníků $\Rightarrow$ celkem $3!\cdot(m+z)!$ možností.

c) počet možností, jak postavit všechny zaměstnance oddělení do řady tak, aby vedoucí pracovníci stáli vedle sebe
Vedoucí pracovníky budeme zařazovat jako jednu osobu $\Rightarrow$ $(m+z+1)!$ možností, jak sestavit řadu, ještě můžeme vedoucí pracovníky prohazovat mezi sebou ($3!$ možností) $\Rightarrow$ celkově $3!\cdot(m+z+1)!$.

d) počet možností, jak postavit všechny zaměstnance oddělení do řady tak, aby vedoucí pracovníci, muži i ženy stáli pohromadě
Nejdříve sestavíme jednotlivé skupiny:

- počet možností, jak seřadit muže: $m!$,
- počet možností, jak seřadit ženy: $z!$,
- počet možností, jak seřadit vedoucí pracovníky: $3!$,

každou možnost seřazení jedné skupiny můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní skupiny $\Rightarrow$ $3!\cdot m!\cdot z!$ možností, výslednou řadu sestavíme z těchto tří skupin ($3!$ možností) $\Rightarrow$ celkově $3!\cdot 3!\cdot m!\cdot z! = (3!)^2\cdot m!\cdot z!$ možností.

e) počet možností, jak rozestavit obyčejné zaměstnance do řady tak, aby se pravidelně střídaly ženy s muži a zbývající ženy stály pohromadě na tom z krajů řady, kde by jinak stál muž,
Postupně budujeme řadu:

- rozestavíme ženy do řady: $z!$ možností,
- rozestavíme muže do řady: $m!$ možností,

každou možnost seřazení jedné skupiny můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro druhou skupinu $\Rightarrow$ $m!\cdot z!$ možností. Pro každou z těchto možností, máme další dvě možnosti, jak spojit obě řady dohromady (první žena nebo první muž), přesunem konce ženské řady před prvního muže žádné další možnosti nepřibývají $\Rightarrow$ celkově $2\cdot m!\cdot z!$ možností.

f) počet možností, jak rozestavit obyčejné zaměstnance podle pohlaví do dvou kruhů ke hraní stmelovací hry „Já jsem šanon, kdo jsi Ty?“,

- Kruh z mužů sestavujeme z řady ($m!$ možností), kterou spojíme můžeme ji m způsoby otočit, aniž by se změnilo vzájemné rozestavení $\Rightarrow$ $\frac{m!}{m}=(m-1)!$ možností,
- kruh z žen sestavuje z řady ($z!$ možností), kterou spojíme můžeme ji z způsoby otočit, aniž by se změnilo vzájemné rozestavení $\Rightarrow$ $\frac{z!}{z}=(z-1)!$ možností,

Každé rozestavení mužského kruhu můžeme kombinovat s každým rozestavením ženského kruhu $\Rightarrow$ celkem $(m-1)!\cdot(z-1)!$ možností

g) rozestavit kruh, který ve hře „Já jsem šanon, kdo jsi Ty?“, vyhraje, pokud si vedoucí jeden z kruhů z předchozího bodu vybere a stoupne si v něm na libovolné místo,
Vyhrává kruh, který si vybere vedoucí:
počet možností, jak sestavit mužský kruh $(m-1)!$, v každém sestaveném kruhu je m mezer, do kterých se může zařadit vedoucí $\Rightarrow$ celkem $m!$ možností,
počet možností, jak sestavit ženský kruh $(z-1)!$, v každém sestaveném kruhu je z mezer, do kterých se může zařadit vedoucí $\Rightarrow$ celkem $z!$ možností,
vedoucí si může vybrat pouze jeden z kruhů $\Rightarrow$ počty možností sčítáme $\Rightarrow$ celkově existuje $m!+z!$ možností.

h) počet možností, jak rozestavit všechny zaměstnance kolem kulatého stolu tak, aby vedoucí měla vedle sebe své oblíbence Petru a Josefa
Trojici vedoucí + Petra + Josef zařazujeme při vytváření řady jako jednoho člověka $\Rightarrow$ sestavujeme řadu z $m+z+3+1-2=m+z+2$ lidí $\Rightarrow$ $(m+z+2)!$ možností, jak sestavit řadu $\Rightarrow \frac{(m+z+2)!}{m+z+2}=(m+z+1)!$ možností, jak sestavit kruh, pro každou tuto možnost máme dvě možnosti, jak usadit vedoucí s oblíbenci $\Rightarrow$ celkem $2(m+z+1)!$ možností rozsazení okolo stolu.

i) počet možností, jak rozestavit do jednoho kruhu všechny muže a potřebný počet žen tak, aby se pohlaví pravidelně střídalo
Kruh opět sestavíme pomocí řady:

- vybíráme všechny muže a stavíme je do řady: $m!$ možností,
- vybíráme m žen ze z: $\frac{z!}{(z-m)!}$ možností,

každou možnost sestavení jedné řady můžeme kombinovat se všemi možnostmi sestavení druhé řady $\Rightarrow$ celkem $\frac{m!\cdot z!}{(z-m)!}$ možností. Obě řady můžeme spojit dvěma způsoby $\Rightarrow$ $\frac{2\cdot m!\cdot z!}{(z-m)!}$ možností sestavení řady, která má $2m$ prvků $\Rightarrow$ $\frac{2\cdot m!\cdot z!}{2m(z-m)!}=\frac{(m-1)!\cdot z!}{(z-m)!}$ možností, jak sestavit kruh.

Př. 9: Petáková:
strana 146/cvičení 49
strana 146/cvičení 50
strana 146/cvičení 51

Shrnutí: Při řešení mnoha příkladů se vyplatí sledovat postup, který bychom použili při praktické realizaci zadání slovní úlohy.