9.1.8 Kombinace I

Předpoklady: 9107

Př. 1: Urči, kolika způsoby je možné ze třídy s 31 studenty vybrat dva zástupce do studentské rady (bez rozlišení funkce).

Vybíráme dvojici z 31 studentů:
1. student … 31 možností,
2. student … 30 možností (jeden už je vybraný),
možnosti můžeme kombinovat mezi sebou $\Rightarrow$ násobíme $31\cdot 30$, ale pozor, podobně jako u přímek (kde nezáleželo, který ze dvou bodů jsme vybrali první), ani tady nezáleží na tom, který ze studentů je vybrán první a který druhý $\Rightarrow$ dvojice Anna, Petr se shoduje s dvojicí Petr, Anna $\Rightarrow$ všechny dvojice jsme započítali dvakrát (jako by záleželo na pořadí vybrání) $\Rightarrow$ provizorní výsledek musíme vydělit dvěma. Na výběr reprezentantů do studentské rady má třída $\frac{31\cdot 30}{2}=465$ možností.

Pedagogická poznámka: Většina studentů si už nepamatuje, že jsme podobný problém řešili v hodině 9102 a tak dospěje k výsledku $31\cdot 30$. Nemá cenu je nechávat příliš dlouho trápit. Rozebereme si příklad na tabuli a pak nechám studenty počítat zbývající příklady.
V dalších dvou příkladech se pak objevují opět problémy se jmenovateli zlomků, v první fázi však připomínám jenom to, že dvojka ve jmenovateli prvního příkladu neznamenala počet prvků, které jsme vybírali.

Př. 2: Urči, kolika způsoby může učitel tělocviku z 25 studentů vybrat tři, kteří odnesou pomůcky (záleží pouze na faktu vybrání).

Vybíráme trojici studentů:
1. student … 25 možností,
2. student … 24 možností,
3. student … 23 možností,
možnosti můžeme kombinovat mezi sebou $\Rightarrow$ násobíme $25\cdot 24\cdot 23$, ale pozor, podobně jako u předchozího příkladu ani tady nezáleží na pořadí, ve kterém jsme studenty vybrali $\Rightarrow$ náš výsledek musíme vydělit počtem možností, které nebudeme rozlišovat.
Kolika způsoby můžeme seřadit tři vybrané studenty: $3!$ $\Rightarrow$ možností, jak vybrat a nerozlišovat je $3!$ krát méně než možností, kdy pořadí rozlišujeme $\Rightarrow$ učitel může studenty vybrat $\frac{25\cdot 24\cdot 23}{3!}=2\,300$ způsoby.

Př. 3: Urči, kolika způsoby může dopadnout rozdání čtyř mariášových karet na „Prší". Kompletní sada karet obsahuje 32 listů.

Vybíráme čtveřici karet:
1. karta … 32 možností,
2. karta … 31 možností,
3. karta … 30 možností,

4. karta … 29 možností,
možnosti můžeme kombinovat mezi sebou $\Rightarrow$ násobíme $32\cdot 31\cdot 30\cdot 29$, ale pozor, podobně jako u předchozího příkladu ani tady nezáleží na pořadí, ve kterém jsme karty vybrali (jde pouze o to, které karty na konci rozdávání držíme v ruce) $\Rightarrow$ náš výsledek musíme vydělit počtem možností, které nebudeme rozlišovat.
Kolika způsoby můžeme seřadit čtyři vybrané karty: $4!$ $\Rightarrow$ možností, jak vybrat a nerozlišovat je $4!$ krát méně než možností, kdy pořadí rozlišujeme $\Rightarrow$ rozdávání karet může dopadnout $\dfrac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}{4!}=35\,960$ způsoby.

Př. 4: Najdi společné rysy předchozích příkladů.

Všechny předchozí příklady jsou skoro stejné:

- máme *n* prvků,
- z nich vybíráme několik (*k*) prvků,
- z prvků sestavuji *k*-tici,
- **nezáleží** na pořadí prvků v *k*-ticí (tedy pořadí v jakém jsme vybírali),
- prvky se neopakují,

$\Rightarrow$ *k*-tice, které jsme sestavovali, se nazývají ***k*-členné kombinace.**

k-členná kombinace z *n* prvků je **ne**uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet *k*-členných kombinací z *n* prvků značíme $K_k(n)$ nebo $K(k,n)$. Označujeme jej jako **kombinační číslo**.

Př. 5: Urči počet *k*-členných kombinací z *n* prvků.

Vzorec pro *k*-členné variace z *n*-prvků známe: $V_k(n)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$.
Počet kombinací je menší. U variací záleží na pořadí vybraných *k* prvků, u kombinací na pořadí vybraných *k* prvků nezáleží.
Počet možností, jak uspořádat vybraných *k* prvků: $k!$ $\Rightarrow$ z každé kombinace můžeme vytvořit $k!$ variací $\Rightarrow$ platí: $V_k(n)=k!\cdot K_k(n)$ (variací je $k!$ více) $\Rightarrow$

$$K_k(n)=\frac{V_k(n)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}.$$

Počet $K_k(n)$ *k*-členných kombinací z *n* prvků je $K_k(n)=\dfrac{V_k(n)}{k!}=\dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$.

Pro zlomek udávající hodnotu kombinačního čísla se velmi často užívá symbol
$K_k(n)=\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$, čteme *n* nad *k*.

Př. 6: Rozepiš a vypočti:

a) $K_3(4)$ b) $K_{10}(5)$ c) $\binom{5}{2}$ d) $\binom{23}{4}$

a) $K_3(4)=\frac{4!}{3!\cdot 1!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2}=4$

b) $K_{10}(5)$ - nejde, nemůžeme vybrat deset prvků z pěti, tak aby byl každý jenom jednou

c) $\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$

d) $\binom{23}{4}=\frac{23\cdot 22\cdot 21\cdot 20}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=23\cdot 11\cdot 7\cdot 5=8855$

Př. 7: Zapiš výsledky příkladů 1. až 3. pomocí kombinačních čísel.

Příklad 1: $K_2(31)=\binom{31}{2}$

Příklad 2: $K_3(25)=\binom{25}{3}$

Příklad 3: $K_4(32)=\binom{32}{4}$

Př. 8: Ve třídě je 14 chlapců a 17 dívek. Urči, kolika způsoby je možné vybrat ze třídy pětičlennou skupinu tak, aby obsahovala:
a) pět libovolných studentů třídy, b) právě tři dívky,
c) alespoň čtyři chlapce.

Skupina má mít pět studentů, ale jinak členy skupiny nerozlišujeme $\Rightarrow$ při výběru nezáleží na pořadí $\Rightarrow$ při všech výběrech budeme vytvářet kombinace.

a) vybíráme pět libovolných studentů z 31 $\Rightarrow$ $K_5(31)=\binom{31}{5}=169\,911$ možností.

b) máme vybrat právě tři dívky $\Rightarrow$ vybíráme 3 dívky a dva chlapce

- tři dívky ze 17 $\Rightarrow$ $K_3(17)=\binom{17}{3}$
- dva chlapci ze 14 $\Rightarrow$ $K_2(14)=\binom{14}{2}$

možnosti výběru dívek a chlapců můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$ celkem
$\binom{17}{3}\cdot\binom{14}{2}=61\,880$ možností.

c) alespoň čtyři chlapce
Vybíráme právě čtyři chlapce nebo právě pět chlapců (nastane právě jedna z uvedených možností $\Rightarrow$ možnosti sčítáme).

Právě čtyři chlapce = čtyři chlapce a 1 dívka

- čtyři chlapci ze 14 $\Rightarrow$ $K_4(14)=\binom{14}{4}$
- jedna dívka ze 17 $\Rightarrow$ $K_1(17)=\binom{17}{1}$

možnosti výběru dívek a chlapců můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$ celkem $\binom{14}{4}\cdot\binom{17}{1}$ možností.

Právě pět chlapců $\Rightarrow$ vybíráme pět chlapců ze 14 $\Rightarrow$ $K_5(14)=\binom{14}{5}$.

Celkem: $\binom{14}{4}\cdot\binom{17}{1}+\binom{14}{5}=19\,019$.

Př. 9: Řešení příkladu 8 c) je:

a) správně dáno i vztahem $\binom{31}{5}-\left[\binom{14}{0}\binom{17}{5}+\binom{14}{1}\binom{17}{4}+\binom{14}{2}\binom{17}{3}+\binom{14}{3}\binom{17}{2}\right]$.

b) nesprávně dáno vztahem $\binom{14}{4}(10+17)$.

Oba body vysvětli.

a)

Vztah ze zadání je příkladem „obráceného výpočtu“. Od všech možných variant $\binom{31}{5}$ odečítáme počty možností, které nevyhovují zadání „alespoň čtyři chlapci“:

- žádný chlapec (a tedy 5 dívek): $\binom{14}{0}\cdot\binom{17}{5}$,
- jeden chlapec (a tedy 4 dívky): $\binom{14}{1}\cdot\binom{17}{4}$,
- dva chlapci (a tedy 3 dívky): $\binom{14}{2}\cdot\binom{17}{3}$,
- tři chlapci (a tedy 2 dívky): $\binom{14}{3}\cdot\binom{17}{2}$.

b) Vztah $\binom{14}{4}(10+17)$ částečně rozlišuje pořadí vybraných dětí. Možnost, že by mezi vybranými byl Adam, Břéťa, Ctirad, David a Emil je započítána dvakrát:

- poprvé: Adam, Břéťa, Ctirad, David jsou vybráni jako povinní čtyř hochů (první část výrazu - $\binom{14}{4}$ možností), Emil je vybrán při vybírání posledního člena skupiny ze zbývajících chlapců a všech dívek)
- podruhé jsou spolu jako hoši vybráni Břéťa, Ctirad, David a Emil a Adam je vybrán při výběru posledního člena skupiny ze zbývajících chlapců a všech dívek.

Ve skutečnosti jde o pořád stejnou možnost (Adam, Břéťa, Ctirad, David a Emil), u které nám nezáleží na tom, zda byl jako poslední vybrán Emil nebo Adam. Proto také tento nesprávným vztah vede k většímu nesprávnému počtu možností 27 027.

Př. 10: Policejní agent-provokatér vybírá ze zásoby pečlivě evidovaných bankovek (každá bankovka je označena číslem, které umožňuje její identifikaci) sumu na úplatky.
K dispozici má celkem 100 bankovek 1000 Kč, 100 bankovek 2000 Kč, 100 bankovek 5000 Kč a 50 bankovek 10000 Kč. Urči kolika způsoby může vybrat:
a) 10 bankovek 5000 Kč na přijímací úplatek na VŠ právnického směru,
b) 40 bankovek 10000 Kč a 20 bankovek 5000 Kč na „pět na stole v českých“ pro bývalého tajemníka předsedy vlády ČR,
c) 5 bankovek 5000 Kč tak, aby mezi nimi byla legendární bankovka E05 752314, se kterou se mazlil při svém zatčení tehdejší starosta brněnských Žabovřesk,
d) 3 bankovky 1000 Kč, 4 bankovky 2000 Kč a 2 bankovky 5000 Kč potřebné k vyřizování povolení k trvalému pobytu na cizinecké policii v Karlových Varech,
e) 4000 Kč v libovolných bankovkách na řešení dopravního přestupku,
f) 6000 Kč v libovolných bankovkách na urychlení vyřizování stavebního povolení na úpravu kůlny na zahradě.
Vysvětlete, proč se policii nikdy nepodaří vyšetřit aféru pana Drobila na ministerstvu životního prostředí.

a) 10 bankovek 5000 Kč na přijímací úplatek na VŠ právnického směru,
Vybíráme 10 bankovek ze 100, na pořadí nezáleží: $\binom{100}{10} \doteq 1{,}731 \cdot 10^{13}$ možností.

b) 40 bankovek 10000 Kč a 20 bankovek 5000 Kč na „pět na stole v českých“ pro bývalého tajemníka předsedy vlády ČR,
Vybíráme postupně jednotlivé hodnoty:

- 40 bankovek 10000 Kč z 50 dostupných: $\binom{50}{40}$ možností,
- 20 bankovek 5000 Kč ze 100 dostupných: $\binom{100}{20}$ možností,

všechny možnosti výběru pro obě hodnoty můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$ celkem $\binom{50}{40} \cdot \binom{100}{20} \doteq 5{,}506 \cdot 10^{30}$ možností.

c) 5 bankovek 5000 Kč tak, aby mezi nimi byla legendární bankovka E05 752314, se kterou se mazlil při svém zatčení tehdejší starosta brněnských Žabovřesk,
Potřebujeme 5 bankovek, jedna z nich je už vybrána $\Rightarrow$ vybíráme 4 bankovky ze zbývajících 99 kusů $\Rightarrow$ $1 \cdot \binom{99}{4} = 3\,764\,376$ možností.

d) 3 bankovky 1000 Kč, 4 bankovky 2000 Kč a 2 bankovky 5000 Kč potřebné k vyřizování povolení k trvalému pobytu na cizinecké policii v Karlových Varech,
Vybíráme postupně jednotlivé hodnoty:

- 3 bankovky 1000 Kč ze100 dostupných: $\binom{100}{3}$ možností,

- 4 bankovky 2000 Kč ze 100 dostupných: $\binom{100}{4}$ možností,
- 2 bankovky 5000 Kč ze 100 dostupných: $\binom{100}{2}$ možností,

všechny možnosti výběru pro obě hodnoty můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$ celkem $\binom{100}{3}\cdot\binom{100}{4}\cdot\binom{100}{2} \doteq 3{,}139\cdot 10^{15}$ možností.

e) 4000 Kč v libovolných bankovkách na řešení dopravního přestupku,
4000 Kč můžeme zaplatit následujícími způsoby:

- 4 bankovky 1000 Kč: $\binom{100}{4}$ možností,
- 2 bankovky 1000 Kč, 1 bankovka 2000 Kč: $\binom{100}{2}\cdot\binom{100}{1}$ možností,
- 2 bankovky 2000 Kč: $\binom{100}{2}$ možností,

všechny možnosti vybrání různých hodnot se navzájem vylučují $\Rightarrow$ celkově $\binom{100}{4}+\binom{100}{2}\cdot\binom{100}{1}+\binom{100}{2} = 4\,421175$ možností.

f) 6000 Kč v libovolných bankovkách na urychlení vyřizování stavebního povolení na úpravu kůlny na zahradě.
6000 Kč můžeme zaplatit následujícími způsoby:

- 6 bankovek 1000 Kč: $\binom{100}{6}$ možností,
- 4 bankovky 1000 Kč, 1 bankovka 2000 Kč: $\binom{100}{4}\cdot\binom{100}{1}$ možností,
- 2 bankovky 1000 Kč, 2 bankovky 2000 Kč: $\binom{100}{2}\cdot\binom{100}{2}$ možností,
- 3 bankovky 2000 Kč: $\binom{100}{3}$ možností,
- 1 bankovka 1000 Kč, 1 bankovka 5000 Kč: $\binom{100}{1}\cdot\binom{100}{1}$ možností,

všechny možnosti vybrání různých hodnot se navzájem vylučují $\Rightarrow$ celkově $\binom{100}{6}+\binom{100}{4}\cdot\binom{100}{1}+\binom{100}{2}\cdot\binom{100}{2}+\binom{100}{3}+\binom{100}{1}\cdot\binom{100}{1} = 1\,608\,8049\,100$ možností.

Vysvětlete, proč se policii nikdy nepodaří vyšetřit aféru pana Drobila na ministerstvu životního prostředí.
Zřejmě pouze proto, že na fingované předání částek, o kterých hovořil na záznamech Martin Knetig, nemá dost peněz.

Dodatek: Desetitisícikorunové bankovky zatím v České republice neplatí. Používají se pouze při uplácení mimořádně chamtivých a hloupých úředníků a k pletení mimořádně nepozorných studentů.

Pedagogická poznámka: Žáci si mohou vyhledat podrobnosti o uvedených kauzách na internetu.

Poznámka: Předchozí příklad je samozřejmě politicky naprosto nekorektní. Bohužel negativní korelace mezi korupcí a životní úrovní je na planetě Zemi daleko těsnější než mezi životní úrovní a přírodním bohatstvím, délkou národních dějin, počtem penzijních fondů, vybaveností dálnic nebo počtem parlamentních funkcionářů. Přesto autor slibuje, že příklad z učebnice odstraní, jakmile se Česká republika dostane v mezinárodním žebříčku korupce organizace TI ze současného 53. místa (rok 2010) na minimálně 30. pozici a předstihne alespoň Botswanu a Jordánsko. Předem upozorňuji, že v to příliš nevěřím, protože za 15 let lítého boje s korupcí sváděného dvojicí našich největších politických stran, které celou dobu dohromady disponují ústavní většinou, se podařilo posunout naši vlast opačným směrem o 10 míst.

Poznámka: Ani v roce 2019 se nepodařilo podmínky v předchozí poznámce splnit. Sice jsme se v žebříčku posunuli (na 38. místo) a předstihli Jordánsko, ale Botswana je stejně jako vysněné 30. místo stále před námi.

Př. 11: Petáková:
strana 146/cvičení 52
strana 146/cvičení 58
strana 146/cvičení 60
strana 146/cvičení 62

Shrnutí: Pokud při sestavování *k*-tice nezáleží na pořadí, vytváříme kombinace (podmnožiny). Počet kombinací udává kombinační číslo $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$.