9.1.9 Kombinace II

Předpoklady: 9108

Př. 1: Je dána pěti prvková množina: $M = \{a;b;c;d;e\}$. Vypiš všechny dvoučlenné kombinace sestavené z těchto pěti prvků. Urči počet kombinací pomocí vzorce.

Vypisujeme kombinace přehledně od *a*:

$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{a,e\}$

$\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{b,e\}$

$\{c,d\}$, $\{c,e\}$

$\{d,e\}$ $\Rightarrow$ 10 kombinací.

Počet kombinací pomocí vzorce: $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 \Rightarrow$ odpovídá.

Každá kombinace prvků z množiny *M* je její podmnožinou. Vytvořením *k*-členné kombinace rozdělíme prvky množiny *M* na dvě skupiny:

- prvky, které jsme vybrali do kombinace (je jich *k*),
- prvky, které jsme do ní nevybrali (je jich $n-k$).

Tato druhá skupina je také kombinací z *n* prvků a to $n-k$ člennou $\Rightarrow$ v našem konkrétním případě, tedy kromě dvoučlenných kombinací, vytváříme i kombinace tříčlenné (zbytky).

$\{a,b\}$	$\{c,d,e\}$
$\{a,c\}$	$\{b,d,e\}$
$\{a,d\}$	$\{a,b,e\}$
$\{a,e\}$	$\{b,c,d\}$
$\{b,c\}$	$\{a,d,e\}$
$\{b,d\}$	$\{a,c,e\}$
$\{b,e\}$	$\{a,c,d\}$
$\{c,d\}$	$\{a,b,e\}$
$\{c,e\}$	$\{a,b,d\}$
$\{d,e\}$	$\{a,b,c\}$

$\Rightarrow$ Obou kombinací musí být stejně $\Rightarrow$ platí: $K_k(n) = K_{n-k}(n)$ nebo-li $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Pro všechna nezáporná čísla *n*, *k*, $n \geq k$, platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Větu snadno dokážeme i dosazením do faktoriálového vyjádření:

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{\left[n-(n-k)\right]!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{(n-n+k)!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

Př. 2: Urči kolika způsoby je možné vybrat z mariášových karet:
a) tři karty, b) tři karty červené barvy,
c) tři karty stejné hodnoty.

a) tři karty
Vybíráme tři karty ze 32, nezáleží na tom, kterou vybereme jako první $\Rightarrow$ sestavujeme tří členné kombinace ze 32 $\Rightarrow$ $K_3(32)=\binom{32}{3}=4960$ možností.

b) tři karty červené barvy
Opět vybíráme tři karty, ale tentokrát pouze z osmi červených, nezáleží na pořadí $\Rightarrow$ sestavujeme tří členné kombinace z 8 $\Rightarrow$ $K_3(8)=\binom{8}{3}=56$ možností.

c) tři karty stejné hodnoty
Nejdříve určíme počet možností, jak vybrat například tři krále:
Vybíráme tři karty ze čtyř králů, nezáleží na pořadí $\Rightarrow$ sestavujeme tří členné kombinace ze 4 $\Rightarrow$ $K_3(4)=\binom{4}{3}=4$ možností.
V mariášových kartách máme osm různých hodnot $\Rightarrow$ 8 možností, jak vybrat hodnotu, pro každou hodnotu 4 možnosti, jak vybrat karty, kombinujeme navzájem $\Rightarrow$ celkem $8\cdot 4=32$ možností.

Př. 3: Urči kolika způsoby je možné na šachovnici 8x8 vybrat:
a) trojici políček, b) trojici políček neležících v jednom sloupci,
c) trojici políček neležících v jednom sloupci ani v jedné řadě,
d) trojici políček, která nemají stejnou barvu.

a) trojici políček
Vybíráme tři políčka ze 64, nezáleží na pořadí vybrání (záleží pouze na tom, která políčka jsme vybrali) $\Rightarrow$ sestavujeme tří členné kombinace ze 64 $\Rightarrow$ $K_3(64)=\binom{64}{3}=41664$ možností.

b) trojici políček neležících v jednom sloupci
Přímý výpočet je obtížný (políčka buď leží v různých sloupcích nebo leží dvě v jednom a třetí v jiném. V druhém případě záleží výběr třetího polička na výběru předchozích dvou…) $\Rightarrow$ zvolíme nepřímý postup: určíme počet všech trojic a od něj odečteme počet trojic, které nevyhovují zadání:

- všechny trojice: $\binom{64}{3}$ (předchozí bod),
- trojice poliček v jednom konkrétním sloupci $\Rightarrow$ vybíráme z osmi políček tři $\Rightarrow$ $K_3(8)=\binom{8}{3}$, na šachovnici je osm sloupců $\Rightarrow$ v osmi sloupcích je $8\cdot\binom{8}{3}$ možností, jak vybrat tři políčka v jednom sloupci,

trojice políček neležících v jednom sloupci: $\binom{64}{3}-8\cdot\binom{8}{3}=41216$.

c) trojici políček neležících v jednom sloupci ani v jedné řadě
Podobné jako v předchozím bodě, kromě trojic v jednom sloupci, musíme odečíst i trojice v jednom řádku (opět $8\cdot\binom{8}{3}$ možností) $\Rightarrow$ celkem:

$\binom{64}{3}-8\cdot\binom{8}{3}-8\cdot\binom{8}{3}=\binom{64}{3}-16\cdot\binom{8}{3}=40\,768$ možností.

d) trojici políček, která nemají stejnou barvu
Přímý postup: na šachovnici jsou dvě barvy $\Rightarrow$ z vybraných políček budou dvě bílá a jedno černé (nebo obráceně):

- vybíráme dvě bílá políčka $\Rightarrow$ vybíráme dvě z 32 $\Rightarrow$ $\binom{32}{2}$ možností,
- vybíráme černé políčko $\Rightarrow$ 32 možností,

možnosti navzájem kombinujeme $\Rightarrow$

- na výběr dvou bílých a jednoho černého políčka máme $\binom{32}{2}\cdot 32$ možností,
- na výběr dvou černých a jednoho bílého políčka máme $\binom{32}{2}\cdot 32$ možností,

celkově $\binom{32}{2}\cdot 32+\binom{32}{2}\cdot 32=2\cdot 32\cdot\binom{32}{2}=64\cdot\binom{32}{2}=31744$ možností.

Nepřímý postup:

- všechny trojice: $\binom{64}{3}$,
- trojice bílých políček $\Rightarrow$ vybíráme tři z 32 bílých políček $\Rightarrow$ $K_3(32)=\binom{32}{3}$,
- trojice černých políček $\Rightarrow$ vybíráme tři z 32 černých políček $\Rightarrow$ $K_3(32)=\binom{32}{3}$,

$\Rightarrow$ políčka, která nemají stejnou barvu: $\binom{64}{3}-\binom{32}{3}-\binom{32}{3}=\binom{64}{3}-2\cdot\binom{32}{3}=31744$ možností.

Dodatek: První verzi výsledku v bodě d) předchozího příkladu $64\cdot\binom{32}{2}$ můžeme také interpretovat takto: na výběr prvního políčka máme 64 možností a pak vybíráme dvě políčka ze 32 políček druhé barvy.

Př. 4: Urči kolika způsoby je možné na šachovnici 8x8 rozestavit:
a) čtyři pěšce stejné barvy, b) pěšce, střelce, věž a královnu,
c) dva bílé a dva černé pěšce.
Šachovnice je prázdná a při rozestavování nedodržujeme pravidla hry (například bílého pěšce můžeme umístit i na černé políčko).

a) čtyři pěšce stejné barvy
Na šachovnici rozestavujeme čtyři stejné figury $\Rightarrow$ nezáleží na tom, na které z políček jsme postavili figurku jako první, nezáleží na pořadí, ve kterém jsme políčka vybrali $\Rightarrow$
$K_4(64) = \binom{64}{4} = 635376$ možností.

b) pěšce, střelce, věž a královnu
Na šachovnici rozdělujeme čtyři různé figury $\Rightarrow$ záleží na tom, na které z políček jsme postavili figurku jako první (na prvním políčku je pěšec, který už nemůže být na žádném z později vybraných políček) $\Rightarrow$ vybíráme čtyři políčka ze 64 záleží na pořadí $\Rightarrow$
$V_4(64) = \frac{64!}{60!} = 15249024$ možností.

c) dva bílé a dva černé pěšce
Rozestavujeme postupně:

- rozestavujeme dva bílé pěšce $\Rightarrow$ nezáleží na pořadí (jsou oba stejní) $\Rightarrow$ vybíráme dvě políčka ze 64 $\Rightarrow$ $K_2(64) = \binom{64}{2}$,
- rozestavujeme dva černé pěšce $\Rightarrow$ nezáleží na pořadí (jsou oba stejní) $\Rightarrow$ vybíráme dvě políčka ze 62 (dvě políčka jsou obsazena bílými pěšci) $\Rightarrow$ $K_2(62) = \binom{62}{2}$,

možnosti rozestavení bílých a černých pěšců spolu můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$ celkově $\binom{64}{2} \cdot \binom{62}{2} = 3812256$ možností.

Př. 5: Někteří studenti při řešení předchozího příkladu 4 c) získají špatný výsledek $2 \cdot \binom{64}{2} \cdot \binom{62}{2}$, který zdůvodňují tím, že máme dvě možnosti, jak vybrat barvu pěšců, které budeme rozestavovat jako první. Proč je tato argumentace nesprávná?

V příkladu 4 rozestavujeme pěšce po šachovnici. Jde nám o to, abychom získali rozestavení figur na šachovnici. Rozlišovat barvu pěšců, které jsme rozestavovali jako první, bychom museli v případě, že by existovalo takové rozestavení pěšců, které bychom nezískali v případě, že začneme s bílými. Takové rozestavení, ale neexistuje. V rozestavení pěšců nehraje roli, kdy jsme ho na šachovnici postavili, proto také nezáleží na tom, které pěšce rozestavujeme jako první.

Př. 6: V rovině je dáno *n* bodů, z nichž *p* leží na jedné přímce. Kromě těchto *p* bodů žádné další tři body na jedné přímce neleží. Urči, kolik je těmto body určeno:
a) přímek, b) trojúhelníků, c) kružnic.

a) přímek

Přímka je dána dvěma body, nezáleží na pořadí, ve kterém je vybereme, takových dvojic můžeme z n bodů sestavit $\binom{n}{2}$.

Ne všechny tyto dvojice určují nové přímky, protože p bodů leží na přímce $\Rightarrow$ všechny přímky sestavené z těchto bodů splývají v jedinou, z p bodů bychom sestavili $\binom{p}{2}$ přímek,

$\Rightarrow$ celkem sestavíme $\binom{n}{2}-\binom{p}{2}+1$ přímek.

b) trojúhelníků

Trojúhelník je určen třemi body, které neleží v přímce, nezáleží na pořadí, ve kterém je vybereme, takových trojic můžeme z n bodů sestavit $\binom{n}{3}$.

Ne všechny tyto trojice určují trojúhelníky, protože p bodů leží na přímce $\Rightarrow$ z p bodů bychom sestavili $\binom{p}{3}$ trojic, které neurčují trojúhelník.

$\Rightarrow$ Celkem sestavíme $\binom{n}{3}-\binom{p}{3}$ trojúhelníků.

c) kružnic

Kružnice je stejně jako trojúhelník určena třemi body, ale na rozdíl od trojúhelníků se tak snadno nedá zjistit, zda na jedné kružnici neleží více bodů. Může se stát, že na kružnici určené trojicí bodů leží i další bod, který samozřejmě neleží na trojúhelníku určeném původními body $\Rightarrow$ počet kružnic je stejný nebo menší než počet trojúhelníků, více o něm tvrdit nemůžeme.

Př. 7: Petáková:
strana 147/cvičení 64 b) c) d) e) f)
strana 147/cvičení 66
strana 147/cvičení 67

Shrnutí: Pro kombinační čísla platí: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.