9.1.10 Úlohy s faktoriály a kombinačními čísly

Předpoklady: 9103, 9105, 9107, 9108

Př. 1: Spočítej s pomocí kalkulačky bez použití funkce na výpočet kombinačního čísla $\binom{1500}{3}$.

$\binom{1500}{3}=\frac{1500!}{1497!\cdot 3!}$ - tento tvar nemůžeme použít protože kalkulačka nespočítá $1500!$ $\Rightarrow$ zkrátíme ve výrazu vše, co půjde. aby kalkulačka počítala s menším číslem.

$$\binom{1500}{3}=\frac{1500!}{1497!\cdot 3!}=\frac{1500\cdot 1499\cdot 1498\cdot 1497!}{1497!\cdot 3!}=\frac{1500\cdot 1499\cdot 1498}{3\cdot 2\cdot 1}=561375500.$$

Př. 2: Porovnej čísla: $100!+101!$ a $99!+102!$.

Žádný z faktoriálů nejde spočíst pomocí kalkulačky (math error = příliš velká čísla) $\Rightarrow$ musíme čísla upravit tak, abychom neporovnávali celé hodnoty faktoriálů.
Nejmenší faktoriál $99!$ $\Rightarrow$ vyjádříme všechny faktoriály pomocí $99!$:

- $100!+101!=99!\cdot 100+99!\cdot 100\cdot 101=99!\cdot(100+100\cdot 101)$,
- $99!+102!=99!+99!\cdot 100\cdot 101\cdot 102=99!(1+100\cdot 101\cdot 102)$.

Nyní stačí porovnat čísla v závorkách, větší číslo v závorce znamená větší hodnotu celého výrazu:

- $100+100\cdot 101=10200$,
- $1+100\cdot 101\cdot 102=1030201$,

$\Rightarrow$ číslo $99!+102!$ je větší než číslo $100!+101!$.

Pedagogická poznámka: Užitečné příklady. Vyvrací standardní studentskou představu, že s kalkulačkou automaticky spočítají všechno.

Př. 3: Kolika nulami končí zápis čísla $80!$?

$80!=80\cdot 79\cdot \ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
Jak vznikají ve výsledném čísle nuly na konci?

- V součinu se vyskytuje násobek 10 $\Rightarrow$ v součinu pro číslo $80!$ je takových čísel 8 (10 až 80) $\Rightarrow$ 8 nul.
- V součinu se vyskytne 5 a 2 (těch je v součinu určitě víc než 5) $\Rightarrow$ hledáme čísla dělitelná 5 a nedělitelná 10 (ty už jsme započítali) $\Rightarrow$ 8 takových čísel $(5,15,25,\ldots 75)$ $\Rightarrow$ dalších 8 nul.
- Číslo je násobkem druhé mocniny 5 $\Rightarrow$ obsahuje dvě 5, ale započítaná je zatím pouze 1 (kvůli tomu, že jde o násobek 5), taková čísla jsou 3 (25, 50, 75) $\Rightarrow$ další 3 nuly.

Celkový počet nul: $8+8+3=19$.
Zápis čísla $80!$ končí na 19 nul.

Správnost předchozího výsledku si můžeme ověřit pomocí počítače, výpočtem faktoriálu.

$80! = 715694570462638022948115337231865321655846573423657525771094450582\allowbreak 27039255480148842668944867280814080000000000000000000$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad patří mezi velmi zajímavé. Ještě jsem nepotkal studenta, který by ho vypočítal správně. Studenti, kteří příklad „vyřeší“, spočítají, že číslo bude mít 16 nul (8+8, a na druhé mocniny zapomenou). Příklad si zkontrolujeme a pak vyhlásíme honbu na chybu. Tento okamžik pak určitě patří mezi ty, kdy se studenti opravdu snaží.

Př. 4: Vyřeš rovnici $(n+1)! = 42(n-1)!$.

Podmínky: $n+1 \geq 0$, $n-1 \geq 0 \Rightarrow n \geq 1$.

$(n+1)! = 42(n-1)!$

$(n+1)n(n-1)! = 42(n-1)! \quad / : (n-1)!$ $\quad (n-1)!$ je určitě kladné číslo $\Rightarrow$ můžeme dělit.

$(n+1)n = 42$

$n^2 + n - 42 = 0$

$(n+7)(n-6) = 0$

$n_1 = 6$ - vyhovuje podmínce $\Rightarrow$ je řešením.

$n_2 = -7$ - nevyhovuje podmínce.

$K = \{6\}$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $9n! + 3(n+1)! \geq (n+2)!$.

Podmínky: $n \geq 0$, $n+1 \geq 0$, $n+2 \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$.

$9n! + 3(n+1)! \geq (n+2)!$

$9n! + 3(n+1) \cdot n! \geq (n+2)(n+1) \cdot n!$

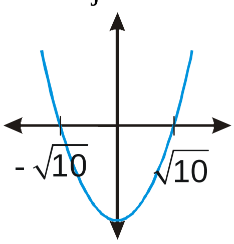
$n!\left[9 + 3(n+1)\right] \geq (n+2)(n+1) \cdot n! \quad / : n!$ $\quad n!$ je určitě kladné číslo $\Rightarrow$ můžeme dělit

$3n + 12 \geq n^2 + 2n + n + 2$

$0 \geq n^2 - 10$

$0 \geq \left(n+\sqrt{10}\right)\left(n-\sqrt{10}\right)$ $\quad \Rightarrow$ kvadratická nerovnice v součinovém tvaru

Před *n* je kladné číslo $\Rightarrow$ „ďolík“, průsečíky v bodech $-\sqrt{10}$ a $\sqrt{10}$.



Hledáme části grafu pod osou $\Rightarrow$ řešení v reálných číslech $\left\langle -\sqrt{10}; \sqrt{10} \right\rangle$.

Řešíme nerovnici pouze pro nezáporná celá čísla $\Rightarrow$ $K = \{1; 2; 3\}$.

Pedagogická poznámka: Zde se projevuje stará bolest s pamětí - největší problémy mají studenti s vyřešením kvadratické nerovnice v závěru příkladu.

Př. 6: Vyřeš rovnici $\binom{x}{x-2}-\binom{x+1}{x}=4$.

Neznámá se vyskytuje v kombinačním čísle $\Rightarrow$ musí splňovat podmínky: $x \geq 0$, $x-2 \geq 0$ $\Rightarrow x \geq 2$.

$$\binom{x}{x-2}-\binom{x+1}{x}=4$$

Nahradíme kombinační čísla faktoriály $\frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}-\frac{(x+1)!}{(x+1-1)!\cdot 1!}=4$.

$$\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!\cdot 2}-\frac{(x+1)\cdot x!}{x!}=4$$

$$\frac{x(x-1)}{2}-(x+1)=4$$

$$x^2-x-2x-2=8$$

$$x^2-3x-10=0$$

$$(x-5)(x+2)=0$$

$x_1=5$, vyhovuje podmínkám $\Rightarrow$ je řešením.

$x_2=-2$, nevyhovuje podmínkám $\Rightarrow$ není řešením.

$K=\{5\}$

Př. 7: Vyřeš nerovnici $\binom{9}{x+1}<2\binom{9}{x}$.

Neznámá je v kombinačním čísle dole $\Rightarrow$ podmínky zapíšeme po rozepsání na faktoriály.
Přepíšeme kombinační čísla pomocí faktoriálů:

$$\binom{9}{x+1}<2\binom{9}{x}$$

$$\frac{9!}{(9-[x+1])!\cdot(x+1)!}<2\frac{9!}{(9-x)!\cdot x!}$$

$$\frac{9!}{(8-x)!\cdot(x+1)!}<2\frac{9!}{(9-x)!\cdot x!}$$

Faktoriál je definován pouze pro nezáporná celá čísla $\Rightarrow$ podmínky: $8-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8$, $x \geq 0$, $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$.

Odstraníme zlomky, všechny faktoriály jsou nezáporná celá čísla $\Rightarrow$ můžeme nerovnici násobit bez obav ztráty kořenů nebo obrácení znaménka.

$$\frac{9!}{(8-x)!\cdot(x+1)!}<2\frac{9!}{(9-x)!\cdot x!} \qquad /\cdot\frac{(9-x)!\cdot x!\cdot(8-x)!\cdot(x+1)!}{9!}$$

$(9-x)!\cdot x!<2(8-x)!\cdot(x+1)!$ rozepíšeme faktoriály: $(9-x)!=(9-x)\cdot(8-x)!$

$$(9-x)(8-x)!\cdot x! < 2(8-x)!\cdot(x+1)x!$$
$$(9-x) < 2(x+1)$$
$$9-x < 2x+2$$
$$7 < 3x$$
$$\frac{7}{3} < x$$
řešením mohou být podle podmínek pouze celá čísla v intervalu $\langle 0;8\rangle$

$$\Rightarrow\ K = \{3;4;5;6;7;8\}$$

Př. 8: Petáková:
strana 141/cvičení 5 d)
strana 141/cvičení 7 a)
strana 141/cvičení 9 a)
strana 142/cvičení 13 b)
strana 143/cvičení 25 c) e)
strana 143/cvičení 28 d)
strana 144/cvičení 30 a)

Shrnutí: Výrazy, které obsahují příliš velké faktoriály pro výpočet pomocí kalkulačky, můžeme spočítat pomocí úprav a zjednodušování.