9.1.11 Kombinatorické úlohy bez opakování

Předpoklady: 9109

Pedagogická poznámka: Tato hodina slouží jednak ke zopakování probraného, ale zejména k praktickému nácviku kombinatoriky v situaci, ve které není z kontextu jasné, jaký ze vzorců použít.

Opakování z minulých kombinatorických hodin:

- Pokud možnosti výběru navzájem kombinujeme, získáme celkový počet možností násobením.
- Pokud můžeme možnosti rozdělit do množin s prázdným průnikem, získáme celkový počet možností součtem.
- Pokud z *n* prvků vybíráme *k* a tvoříme z nich uspořádanou *k*-tici máme $V_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!}$ možností (variace).
- Pokud z *n* prvků vybíráme *n* a tvoříme z nich uspořádanou *n*-tici máme $P(n)=n!$ možností (permutace).
- Pokud z *n* prvků vybíráme *k* a tvoříme z nich neuspořádanou *k*-tici máme $K_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ možností (kombinace).

Př. 1: Ve sportce je každý týden z 49 čísel taženo 6 čísel a poté jedno číslo doplňkové.
a) Kolika způsoby může dopadnout tah, pokud neuvažujeme doplňkové číslo?
b) Kolika způsoby může dopadnout tah, pokud doplňkové číslo uvažujeme?

a) Kolika způsoby může dopadnout tah, pokud neuvažujeme doplňkové číslo?
Vybíráme 6 čísel ze 49, nezáleží na tom v jakém pořadí čísla vytáhneme, pouze na tom, která jsme vytáhli $\Rightarrow$ sestavujeme 6-prvkovou kombinaci ze 49 $\Rightarrow$ $\binom{49}{6}=\frac{49!}{43!\cdot 6!}=13983816$ možností.
b) Kolika způsoby může dopadnout tah, pokud doplňkové číslo uvažujeme?
Máme již vybranou šestici a k nim ze zbylých čísel vybíráme jedno další číslo, které od zbývajících odlišujeme (je doplňkové), na jeho výběr máme 43 možností, tyto možnosti kombinujeme se všemi možnostmi při výběru normálních šesti čísel $\Rightarrow$ $\binom{49}{6}\cdot 43$ možností.

Př. 2: Známá modelka VV má obrovský šatník s velkým výběrem modelů. Například pro pěkné počasí má 15 (6 od první a 9 od druhé sponzorské firmy) druhů klobouků, 58 (24 od první a 34 od druhé sponzorské firmy) různých kostýmů a 32 (20 od první a 12 od druhé) párů bot. Kolika různými způsoby může zkombinovat jednotlivé části oblečení ta, aby byla celá vybavena od jedné firmy?

Pokud má být oblečena pouze od jedné z firem, musí mít všechny části oděvu buď od první nebo od druhé firmy. Tyto dvě možnosti se navzájem vylučují, celkový počet možností tak získáme jako součet možností oblečení od první firmy a možností oblečení od druhé firmy.

- Oblečení od **první firmy**: 6 možností klobouky, 24 možností kostýmů, 20 možností boty, každé z bot můžeme kombinovat se všemi kostýmy a klobouky $\Rightarrow$ celkový počet možností získáme vynásobením: $6 \cdot 24 \cdot 20$.
- Oblečení od **druhé firmy**: 9 možností klobouky, 34 možností kostýmů, 12 možností boty, každé z bot můžeme kombinovat se všemi kostýmy a klobouky $\Rightarrow$ celkový počet možností získáme vynásobením: $9 \cdot 34 \cdot 12$.

Celkem má modelka $6 \cdot 24 \cdot 20 + 9 \cdot 34 \cdot 12$ možností, jak se obléknout tak, aby byla celá vybavena od jedné firmy.

Př. 3: Urči počet všech pěticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic 0, 2, 4, 5, 7. Kolik z těchto čísel je: a) dělitelných šesti, b) větších než 50000?

Celkový počet čísel:
Dosazujme postupně možností na jednotlivé cifry: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (na první místo nesmíme dát 0).
Jiný postup:
Všechny možnosti, jak seřadit číslice (tvoříme uspořádané pětice z pěti prvků): $5!$
Ne každá uspořádaná pětice z číslic 0, 2, 4, 5, 7 je pěticiferné číslo. Musíme odečíst ty, které mají na začátku nulu: $4!$ možností (možnosti, jak seřadit za nulou zbývající číslice)
Celkový počet pěticiferných čísel: $5! - 4!$
a) čísla dělitelná šesti
Ciferný součet je dělitelný třemi: $2+4+5+7+0=18$ $\Rightarrow$ bude platit vždy.
Číslo je sudé: končí na 0, 2, 4.

- čísla končící na 0: na zbývající čtyři místo můžeme napsat cokoliv ze zbývajících čísel $\Rightarrow$ $4!$ možností ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$),
- čísla končící na 2: na prvním místě nemůže být 0 $\Rightarrow$ $3 \cdot 3!$ (první ze tří, zbývající uspořádáváme libovolně) možností,
- čísla končící na 4: na prvním místě nemůže být 0 $\Rightarrow$ $3 \cdot 3!$ (první ze tří, zbývající uspořádáváme libovolně) možností.

Každé číslo dělitelné šesti patří do jedné z předchozích možností, žádné nepatří do dvou $\Rightarrow$ celkový počet získáme součtem jednotlivých možností $4! + 3 \cdot 3! + 3 \cdot 3!$.

b) čísla větší než 50000
Na prvním místě může být buď číslo 5 nebo 7 $\Rightarrow$ 2 možnosti na první místo, zbývající čísla můžeme uspořádat libovolně $\Rightarrow$ $2 \cdot 4!$ možností ($2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$).

Př. 4: Reprezentační hokejový tým má v nominaci 13 útočníků, 7 obránců a dva brankáře.
a) Kolik šestic (3 útočníci + 2 obránci + brankář) hráčů může trenér postavit na úvodní střídání?
b) Kolika způsoby může trenér sestavit celý tým (1. pětka, 2. pětka, 3. pětka, 4.tý útok, brankář, náhradní brankář).
(ani u útočníků ani u obránců nerozlišujeme jejich specializaci – levý, pravý, centr)

a) Kolik šestic (3 útočníci + 2 obránci + brankář) hráčů může trenér postavit na úvodní střídání?
Ke všem možnostem, jak vybrat útočníky, můžeme vystřídat všechny možnosti výběru dvojice obránců i všechny možnosti výběru brankáře $\Rightarrow$ možnosti budeme mezi sebou násobit:

- možnosti výběru útočníků: vybíráme 3 ze 13 bez ohledu na pořadí $\Rightarrow$ $\binom{13}{3}$,
- možnosti výběru obránců: vybíráme 2 ze 7 bez ohledu na pořadí $\Rightarrow$ $\binom{7}{2}$,
- možnosti výběru obránců: vybíráme 1 ze 2 bez ohledu na pořadí $\Rightarrow$ $\binom{2}{1}$,

$\Rightarrow$ celkem možností (kombinujeme mezi sebou): $\binom{13}{3}\binom{7}{2}\binom{2}{1}$.

b) Kolika způsoby může trenér sestavit celý tým (1. pětka, 2. pětka, 3. pětka, 4.tý útok, brankář, náhradní brankář).
Sestavy jednotlivých pětek můžeme mezi sebou kombinovat $\Rightarrow$ možnosti pro jednotlivé řady mezi sebou násobíme.

- první pětka: $\binom{13}{3}\cdot\binom{7}{2}$,
- druhá pětka: $\binom{10}{3}\cdot\binom{5}{2}$,
- třetí pětka: $\binom{7}{3}\cdot\binom{3}{2}$,
- čtvrtý útok: $\binom{4}{3}$,
- brankář: $\binom{2}{1}$,

$\Rightarrow$ celkový počet možností: $\binom{13}{3}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{10}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{1}$.

Př. 5: V třídě 4.B se budou známky z matematiky rozdělovat losem. Celkem bude mezi 31 studentů rozděleno 3 jedničky, 8 dvojek, 15 trojek, 4 čtyřky a jedna pětka.
a) Kolik je možností, jak přidělit 3 jedničky?
b) Kolik je možností, jak rozdělit všechny známky?
c) Kolik je možností, jak rozdělit všechny známky, pokud má Káťa K. dostat jedničku, Marek s Radimem trojku a Pavel má propadnout?

Při vybírání studentů, kteří dostanou známku záleží pouze na tom, jakou známku jim přidělíme, ne na tom, zda ji dostali jako první nebo třetí $\Rightarrow$ sestavujeme kombinace.
a) Kolik je možností, jak přidělit 3 jedničky?
Vybíráme 3 studenty ze 31 $\Rightarrow$ $\binom{31}{3}$ možností.
b) Kolik je možností, jak rozdělit všechny známky?
Budeme postupně rozdělovat jednotlivé známky, počet studentů, které máme k dispozici se postupně zmenšuje, možnosti výběru jednotlivých známek můžeme kombinovat $\Rightarrow$ celkový výsledek získáme vynásobením jednotlivých možností:

- jedničky: vybíráme 3 studenty ze 31 $\Rightarrow$ $\binom{31}{3}$ možností,

- dvojky: vybíráme 8 studentů z 28 $\Rightarrow \binom{28}{8}$ možností,
- trojky: vybíráme 15 studentů z 20 $\Rightarrow \binom{20}{15}$ možností,
- čtyřky: vybíráme 4 studenty z 5 $\Rightarrow \binom{5}{4}$ možností,
- pětka: jediný student $\Rightarrow \binom{1}{1} = 1$ možností,

$\Rightarrow$ celkem $\binom{31}{3} \cdot \binom{28}{8} \cdot \binom{20}{15} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{1}{1}$ možností.

c) Jak rozdělit známky při splnění omezujících podmínek?
Čtyři studenti mají známku jasnou před losováním $\Rightarrow$ začínáme vybírat ze 27 studentů, u jedniček vybíráme pouze 2 (jednu jedničku má Káťa K.), u trojek vybíráme pouze 13 studentů (trojky má Marek s Radimem) a pětku nerozdáváme (dostane ji Pavel).

$\Rightarrow$ Celkem $\binom{27}{2} \cdot \binom{25}{8} \cdot \binom{17}{13} \cdot \binom{4}{4}$ možností.

Poznámka: Při rozdělování známek můžeme samozřejmě postupovat i od pětek k jedničkám. V bodu b) bychom pak získali výraz $\binom{31}{1} \cdot \binom{30}{4} \cdot \binom{26}{15} \cdot \binom{11}{8} \cdot \binom{3}{3}$ jehož hodnota je stejná.

Další možností, jak vyřešit bod b) je výraz $\frac{31!}{3! \cdot 15! \cdot 8! \cdot 4! \cdot 1!}$, který odpovídá tomu, že bychom třídu seřadili do řady, rozdali známky podle pořadí a výsledek vydělili počtem možností, jak mezi sebou promíchat studenty s stejnými známkami.

Př. 6: Ve třídě je 34 míst v lavicích po dvou. Cvičení z matematiky se účastní 14 studentů (8 dívek a 6 kluků). Kolika způsoby se mohou studenti rozesadit po třídě:
a) bez dalších podmínek,
b) tak, aby seděli po dvojicích,
c) tak, aby seděli po dvojicích stejného pohlaví,
d) tak, aby v žádné lavici neseděli dva studenti,
e) tak, aby každý kluk seděl s dívkou a zbývající dívky seděly spolu.

a) bez dalších podmínek
Postupně přidělujeme jednotlivých studentům židle:
1. student … 34 možností
2. student … 33 možností
..
14. student … 21 možností $\Rightarrow 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot ... \cdot 22 \cdot 21$

Jiné řešení:
Ze třiceti čtyř míst vybíráme 14, záleží na pořadí (jiné pořadí vybrání míst znamená jiné rozsazení studentů, protože prvního studenta dáváme vždy na první vybrané místo) $\Rightarrow$ sestavujeme 14 členné variace ze 34 $\Rightarrow V_{14}(34) = \frac{34!}{20!} = 34 \cdot 33 \cdot ... \cdot 22 \cdot 21$ možností

Ještě jinak:

Vybereme 14 míst ze 34 na pořadí nezáleží (jde jen o to, které z míst obsadíme) $\Rightarrow$

$K_{14}(34)=\binom{34}{14}$ možností.

Teď rozsadíme studenty $\Rightarrow$ vytváříme všechna možná pořadí 14 studentů $\Rightarrow$ $14!$ možností
možnosti výběru lavic i studentů navzájem kombinujeme (na každém výběru lavic, můžeme vyzkoušet všechna uspořádání studentů) $\Rightarrow$ možnosti navzájem násobíme

celkem: $\binom{34}{14}\cdot 14!=\frac{34!}{20!\cdot 14!}\cdot 14!=\frac{34!}{20!}$ možností.

b) tak, aby seděli po dvojicích
Budeme postupovat podobně jako v poslední verzi předchozího bodu, nejdříve vybereme místa a na ně rozsadíme studenty:

- možnosti výběru míst: $\binom{17}{7}$ - ze sedmnácti lavic vybíráme 7 (14 míst), na pořadí nezáleží,
- možnosti rozsazení studentů na vybraná místa: $14!$

celkem: $\binom{17}{7}\cdot 14!$ možností (na každém výběru lavic můžeme vyzkoušet všechna rozsazení studentů).

c) tak, aby seděli po dvojicích stejného pohlaví
Podobné předchozímu bodu, nejdříve rozsadíme dívky, potom chlapce

dívky: $\binom{17}{4}\cdot 8!$ (ze sedmnácti lavic vybíráme 4, pak rozsadíme 8 dívek)

chlapci: $\binom{13}{3}\cdot 6!$ (ze zbývajících 13 lavic vybíráme 3, pak rozsadíme 6 chlapců)

možnosti mezi sebou násobíme $\Rightarrow$ celkem: $\binom{17}{4}\cdot 8!\cdot\binom{13}{3}\cdot 6!$ možností (pokud nejdříve rozsadíme chlapce získáme výraz $\binom{17}{3}\cdot 8!\cdot\binom{14}{4}\cdot 6!$, který má stejnou hodnotu).

d) tak, aby v žádné lavici neseděli dva studenti
Pokud nemají v žádné lavici sedět dva studenti musíme:

- vybrat lavice: vybíráme 14 lavic ze 17, nezáleží na pořadí $\Rightarrow$ $\binom{17}{14}$ možností,
- do vybraných lavic rozsadíme studenty $\Rightarrow$ $14!$ možností,
- každý ze studentů má možnost si vybrat ze dvou míst $\Rightarrow$ 2^{14} možností ,

jednotlivé možnosti můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$ možnosti mezi sebou násobíme:

celkem: $\binom{17}{14}\cdot 14!\cdot 2^{14}$ možností.

e) tak, aby každý kluk seděl s dívkou a zbývající dívky seděly spolu
Bude obsazeno 7 lavic:

* vybereme 7 lavic, nezáleží na pořadí: $\binom{17}{7}$ možností,
* vybereme lavice, ve které budou sedět dvě dívky: 7 možností,
* vybereme dvě dívky, které sedí spolu a posadíme na dvě místa v lavici: $\binom{8}{2}\cdot 2$,
* rozsadíme zbývající dívky do lavic: $6!$ možností,
* rozsadíme zbývající chlapce do lavic: $6!$ možností,
* dvojice v lavice můžeme prohazovat v rámci lavice: 2^6 možností,

jednotlivé možnosti můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$ možnosti mezi sebou násobíme:

celkem: $\binom{17}{7}\cdot 7\cdot\binom{8}{2}\cdot 2\cdot 6!\cdot 6!\cdot 2^6$ možností.

Dodatek: Způsobů jak sestavovat výrazy, které jsou řešením jednotlivých bodů je většinou více. Například pro poslední bod můžeme sestavit i výraz $\binom{17}{1}\cdot\binom{8}{2}\cdot 2\cdot\binom{16}{6}\cdot 6!\cdot 6!\cdot 2^6$. Kdyby byl některých ze studentů hotový dřív, můžete mu ho zadat na rozluštění (postupně: vybereme jednu lavici pro dvě holky, vybereme tyto dvě holky, rozsadíme je do lavice, vybereme lavice pro šest smíšených dvojic, rozsadíme holky, rozsadíme kluky, prohážeme dvojice v lavicích).

Shrnutí: Při řešení kombinovaných úloh musíme postupovat postupně.