9.1.12 Variace s opakováním

Předpoklady: 9103, 9105

Pedagogická poznámka: Všechny základní kombinatorické postupy s opakováním jsou naplánovány na jednu hodinu. Je to možné stihnout, pokud si žáci pamatují základní postupy bez opakování. Vzájemné srovnání postupů bez opakování i s opakováním je jedním z velkých přínosů kombinatoriky a hlavní důvod, proč si myslím, že by se kombinatorika s opakováním neměla vynechávat.

Pedagogická poznámka: Tato hodina se dá probrat za 45 minut, ale pokud si chcete se studenty popovídat o heslech a kódování snadno zjistíte, že potřebujete ještě jednu půlhodinu navíc.

Př. 1: Mezinárodní abeceda má 26 písmen. Urči kolik možných hesel můžeme sestavit pokud:
a) má heslo 4 znaky a je sestavené pouze z malých písmen,
b) má heslo 4 znaky a je sestavené z malých písmen, velkých písmen a číslic,
c) má heslo 10 znaků a je sestavené z malých písmen, velkých písmen a číslic.

a) heslo má 4 znaky a je sestavené pouze z malých písmen
První znak hesla … 26 možností (26 písmen na výběr),
druhý znak hesla … 26 možností (můžeme použít znovu stejné písmeno),
třetí znak hesla … 26 možností,
čtvrtý znak hesla … 26 možností.
Jednotlivé znaky spolu můžeme kombinovat (k libovolnému znaku na prvním místě můžeme vyzkoušet všechny možnosti na ostatních místech) $\Rightarrow$ počty možností mezi sebou násobíme $\Rightarrow$ celkově $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 = 456976$ možností.

b) heslo má 4 znaky a je sestavené z malých písmen, velkých písmen a číslic
Stejný postup jako v minulém bodě, na každý znak máme 26 (malá písmena) + 26 (velká písmena) + 10 (číslice) možností: $26+26+10=62$ možností $\Rightarrow$
celkem $62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 = 62^4 = 14776336$ (nárůst o dva řády).

c) má heslo 10 znaků a je sestavené z malých písmen, velkých písmen a číslic
Stejný postup jako u předchozího bodu, desetkrát vybíráme jeden z 62 znaků, možnosti násobíme mezi sebou: $62^{10} = 839299365868340224$ možností (tak to už v rozumném čase nestihne vyzkoušet ani počítač).

Dodatek: Rychlý osobní počítač s duálním procesorem stihne za sekundu vyzkoušet až 10 000 000 hesel $\Rightarrow$ lámání hesla (vyzkoušení všech možných kombinací) z bodu b) mu trvá přibližně sekundu.

Dodatek: PIN kód na bankovní kartě má pouze 10 000 možných kombinací. Jeho náhodné prolomení je blokováno tím, že automaty umožňují pouze dva neúspěšné pokusy o jeho zadání a při třetím neúspěšném pokusu kartu pohltí.

Pedagogická poznámka: Myslím, že je docela vhodné si na tomto místě promluvit o heslech a jejich lámání.

Př. 2: Veškeré informace se v počítačích zapisují pomocí sledu nul a jedniček. Jedna hodnota 0 nebo 1 se nazývá bit, většina informací se pak zapisuje sledem bitů. Například pro zápis znaků (písmen nebo číslic) se používá sled osmi bitů (1 byte). Existuje tabulka (nazývaná ASCII), která každé uspořádané osmici z jedniček a nul přiřazuje jeden znak. Kolik znaků můžeme pomocí ASCII tabulky zapsat (kolik existuje uspořádaných osmic složených z jedniček a nul)?

1. bit … 2 možnosti
2. bit … 2 možnosti
3. bit … 2 možnosti
…
8. bit … 2 možnosti

Možnosti na jednotlivých bitech spolu můžeme kombinovat (k jedné možnosti na prvním bitu můžeme vyzkoušet všechny možnosti na ostatních bitech) $\Rightarrow$ celkový počet získáme vynásobením možností pro jednotlivé bity $\Rightarrow$ celkem existuje $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^8=256$ možností (a tedy možnost zapsat 256 znaků).

Dodatek: 256 různých znaků je dost pro použití anglické abecedy, bohužel málo pro kódování speciálních znaků různých jazyků (třeba české čárky a háčky) $\Rightarrow$ celosvětově platí pouze prvních 128 znaků, v druhé polovině se mohou tabulky lišit $\Rightarrow$ CHAOS (v devadesátých letech se v ČR používalo několik různých druhů kódování, což způsobovalo uživatelům nemalé problémy. Nakonec nás ten Hus vyšel pěkně draho).

Př. 3: Najdi společné rysy předchozích příkladů. Který z dosud probraných postupů je příkladům nejbližší?

Všechny předchozí příklady jsou skoro stejné:

- máme *n* prvků,
- z nich vybíráme několik (*k*) prvků,
- z prvků sestavujeme *k*-tici,
- záleží na pořadí,
- **prvky se mohou opakovat.**

Náš postup velmi připomíná tvorbu variací.

$\Rightarrow$ *k*-tice, které jsme sestavovali se nazývají ***k*-členné variace s opakováním.**

***k*-členná variace s opakováním** z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše *k*-krát.

Poznámka: Pokud je v textu uvedeno pouze slovo variace, má se za to, že se jedná o variace bez opakování. Pokud chceme variace s opakováním, musíme to přímo uvést.

Př. 4: Urči počet *k*-členných variací s opakováním z *n* prvků.

Vytváříme uspořádanou *k*-tici z *n* prvků:

1. člen: n možností,
2. člen: n možností,
3. člen: n možností,
…
k -tý člen: n možností.
Možnosti kombinujeme: $n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$.

Počet k-členných variací z n prvků značíme $V'_k(n)$ nebo $V'(k,n)$.

Počet $V'_k(n)$ k-členných variací s opakováním z n prvků je $V'_k(n) = n^k$.

Př. 5: Rozepiš a vypočti:
a) $V'_3(4)$ b) $V'_1(10)$ c) $V'_8(2)$

a) $V'_3(4) = 4^3$ b) $V'_1(10) = 10$ c) $V'_8(2) = 2^8$

Př. 6: Máme množinu se třemi prvky: $M = \{a;b;c\}$. Vypiš všechny dvoučlenné variace s opakováním sestavené z těchto tří prvků. Urči jejich počet pomocí vzorce. Které z vypsaných variací nepatří do dvoučlenných variací (bez opakování) sestavených z prvků množiny M?

Vypisujeme variace přehledně podle prvního prvku.
(a,a), (a,b), (a,c)
(b,a), (b,b), (b,c)
(c,a), (c,b), (c,c)
Počet variací s opakováním pomocí vzorce: $V'_2(3) = 3^2 = 9$ $\Rightarrow$ odpovídá.
Mezi variace bez opakování nepatří ty dvojice, které obsahují dva stejné prvky:
(a,a), (b,b), (c,c) $\Rightarrow$ variací bez opakování je 6, což potvrzuje i vzorec $V_2(3) = 3 \cdot 2 = 6$.

Pomocí variací s opakováním můžeme určit počet podmnožin k prvkové množiny.
Ukážeme si příklad s dvouprvkovou podmnožinou $M = \{a;b\}$.
Množina má čtyři podmnožiny: $\{a;b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{\ \}$.
Problém: Podmnožiny mají různý počet prvků $\Rightarrow$ pomocí kombinatoriky to půjde těžko.
Fígl: Každou podmnožinu můžeme zapsat pomocí uspořádané dvojice z jedniček a nul.
$\{a;b\} \Leftrightarrow (1;1)$ 1 – podmnožina obsahuje prvek a, 1 - podmnožina obsahuje prvek b
$\{a\} \Leftrightarrow (1;0)$ 1 – podmnožina obsahuje prvek a, 0 - podmnožina neobsahuje prvek b
$\{b\} \Leftrightarrow (0;1)$ 0 – podmnožina neobsahuje prvek a, 1 - podmnožina obsahuje prvek b
$\{\ \} \Leftrightarrow (0;0)$ 0 – podmnožina neobsahuje prvek a, 0 - podmnožina neobsahuje prvek b
$\Rightarrow$ Uspořádaná dvojice nám říká, které prvky v podmnožině budou a které ne $\Rightarrow$ počet podmnožin je stejný jako počet uspořádaných dvojic.
Kolik je uspořádaných dvojic? Tvoříme je ze dvou prvků (0 a 1), které se mohou opakovat $\Rightarrow$ dvojčlenné variace s opakováním ze dvou prvků $\Rightarrow$ $V'_2(2) = 2^2 = 4$.

Př. 7: Urči počet všech podmnožin *k* prvkové množiny.

Množina má *k* prvků $\Rightarrow$ u každého prvku musíme rozhodnout zda bude do podmnožiny patřit nebo ne $\Rightarrow$ budeme z jedniček vytvářet uspořádané *k*-tice $\Rightarrow$ *k*-členné variace s opakováním ze dvou prvků $\Rightarrow$ $V'_k(2) = 2^k$.

k prvková množina má 2^k podmnožin.

Pedagogická poznámka: Dobrý příklad na odhalení mechanicky uvažujících studentů. Nejčastější chybou je špatné pochopení role dvojky v předchozím vysvětlování, které vede k výsledku k^k. Takovým studentům radím, aby zkusili konkrétně spočítat příklad pro tříprvkovou množinu. Stejnou radu mám i pro ty, kteří si neví rady vůbec.

Př. 8: Urči kolik různých znaků můžeme v Morseově abecedě zapsat pomocí maximálně 4 teček nebo čárek.

Pro každý počet teček a čárek určíme počet možností zvlášť:

- jednoduché znaky: 2 možnosti,
- znaky ze dvou teček nebo čárek: uspořádaná dvojice ze dvou prvků s opakováním $V'_2(2) = 2^2 = 4$,
- znaky ze tří teček nebo čárek: uspořádaná trojice ze dvou prvků s opakováním $V'_3(2) = 2^3 = 8$,
- znaky ze čtyř teček nebo čárek: uspořádaná čtveřice ze dvou prvků s opakováním $V'_4(2) = 2^4 = 16$.

Znak může být buď z jednoho, dvou, tří nebo čtyř signálů $\Rightarrow$ spočtené možnosti sečteme.
Celkem možností: $2+4+8+16=30$.

Př. 9: Petáková:
strana 148/cvičení 72

Shrnutí: Variace s opakováním jsou analogií variací bez opakování, ve kterém můžeme každý prvek použít vícekrát.