

9.1.15 Kombinatorické úlohy s opakováním I

Předpoklady: 9112, 9113, 9114

Pedagogická poznámka: Neřadím tuto hodinu vždy ihned po hodině 9114. Mám pro studenty připravenou sbírku příkladů na kombinatorické úlohy s opakováním a tato hodina slouží jako závěrečné cvičení s kontrolou sbírky (samozřejmě u těch, kteří se z ní snažili něco spočítat).

Pedagogická poznámka: Pokud spěchám, využívám začátek hodiny na dobrání případných restů z předchozích dvou hodin. V případě největšího stresu je možné zadat zopakování kombinatoriky a hlavně sestavení příkladů na doma. V hodině pak jenom předat zadání sousedovi a pokračovat další hodinou.

Pedagogická poznámka: Na začátek hodiny je vhodné zařadit dopředu hlášenou pětiminutovou písečku z opakovací kombinatoriky.

Opakování kombinatoriky

Základní kombinatorické postupy

- Pokud možnosti výběru navzájem kombinujeme, získáme celkový počet možností násobením.
- Pokud můžeme možnosti rozdělit do množin s prázdným průnikem, získáme celkový počet možností součtem.

Základní způsoby sestavování k -tic

- Pokud z n prvků vybíráme k a tvoříme z nich uspořádanou k -tici, ve které se žádný prvek nesmí opakovat, máme $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ možností (variace).
- Pokud z n prvků vybíráme n a tvoříme z nich uspořádanou n -tici (tedy pouze měníme pořadí již vybraných prvků), ve které se žádný prvek nesmí opakovat, máme $P(n) = n!$ možností (permutace).
- Pokud z n prvků vybíráme k a tvoříme z nich neuspořádanou k -tici, ve které se žádný prvek nesmí opakovat, máme $K_k(n) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ možností (kombinace).
- Pokud z n prvků vybíráme k a tvoříme z nich uspořádanou k -tici, ve které se každý prvek může opakovat maximálně k -krát, máme $V'_k(n) = n^k$ možností (variace s opakováním).
- Pokud tvoříme uspořádanou k -tici z n prvků, kde se první opakuje k_1 -krát, druhý k_2 -krát až n -tý k_n -krát (tedy jen měníme pořadí již vybraných prvků), máme $P'(k_1; k_2; \dots; k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$ možností (permutace s opakováním).
- Pokud z n prvků vybíráme k a tvoříme z nich neuspořádanou k -tici, ve které se každý prvek může opakovat nejvýše k -krát, máme $K'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$ možností (kombinace s opakováním).

Př. 1: Do třídy chodí 12 kluků a 18 dívek. Sestav zadání libovolné kombinatorické úlohy o této třídě, jejímž řešením bude číslo: a) $12+18$ b) $12 \cdot 18$.

a) $12+18$

Sčítáme možnosti \Rightarrow dáváme dohromady možnosti, které nemají žádný průnik.

Kolika způsoby je možné ze třídy vybrat jednoho zástupce do školní rady?

b) $12 \cdot 18$

Násobíme možnosti \Rightarrow vytváříme výsledný počet tím, že kombinujeme možnosti.

Kolika způsoby je možné ze třídy vybrat dvojici kluk-holka, která přednese poděkování na maturitním plese?

Př. 2: Sestav typické příklady, jejichž řešením jsou následující kombinatorické hodnoty. Jednotlivé body řeš v náhodném pořadí (nezachovávej pořadí v zadání) na zvláštní papír.

a) $V_3(6)$ b) $P(6)$ c) $K_3(6)$ d) $V'_3(6)$ e) $P'(6,3)$ $K'_3(6)$

a) $V_3(6)$

Variace 3 řádu bez opakování z 6 prvků \Rightarrow z 6 prvků vybíráme tři a uspořádáváme je.

Turnaje se účastní 6 týmů. Kolika způsoby mohou být obsazeny první tři místa (stupně vítězů)?

b) $P(6)$

Permutace 6 prvků \Rightarrow uspořádáváme 6 prvků.

Turnaje se účastní 6 týmů. Kolik možných existuje možných výsledných pořadí?

c) $K_3(6)$

Kombinace bez opakování 3 prvků z 6 \Rightarrow z 6 prvků vybíráme 3, nezáleží na pořadí vybraní.

Turnaje se účastní 6 týmů. Kolika způsoby můžeme vybrat tři týmy, které budou zařazeny do skupiny A?

d) $V'_3(6)$

Variace 3 řádu z opakováním z 6 prvků \Rightarrow z 6 (druhů) prvků vybíráme tři a uspořádáváme je, prvky se mohou opakovat.

Kolik tří znakových hesel je možné sestavit ze šesti různých znaků?

e) $P'(6,3)$

Permutace s opakováním ze 3 a 6 prvků \Rightarrow máme dva druhy prvků, od jednoho 3 a od druhého 6 kusů, hledáme všechna možná uspořádání.

Kolik čísel můžeme sestavit z 3 jedniček a 6 dvojek?

$K'_3(6)$

Trojčlenné kombinace s opakováním z 6 prvků \Rightarrow máme 6 (druhů) prvků, které se mohou opakovat, vybíráme 3 nezáleží na pořadí.

Kolik částek můžeme zaplatit třemi mincemi, pokud máme k dispozici dostatečné množství 6 druhů mincí (1, 2, 5, 10, 20, 50 korun)?

Pedagogická poznámka: Papír s úlohami každý žák předá některému ze spolužáků (lépe do jiné lavice), který pak příklady vyřeší a tím zkontroluje, zda byly zadány správně. Případné spory řeší učitel.

Shrnutí: