

## 9.1.15 Kombinatorické úlohy s opakováním I

**Předpoklady:** 9112, 9113, 9114

**Pedagogická poznámka:** Neřadím tuto hodinu vždy ihned po hodině 9114. Mám pro studenty připravenou sbírku příkladů na kombinatorické úlohy s opakováním a tato hodina slouží jako závěrečné cvičení s kontrolou sbírky (samozřejmě u těch, kteří se z ní snažili něco spočítat).

**Pedagogická poznámka:** Pokud spěchám, využívám začátek hodiny na dobrání případných restů z předchozích dvou hodin. V případě největšího stresu je možné zadat zopakování kombinatoriky a hlavně sestavení příkladů na doma. V hodině pak jenom předat zadání sousedovi a pokračovat další hodinou.

**Pedagogická poznámka:** Na začátek hodiny je vhodné zařadit dopředu hlášenou pětiminutovou písečku z opakovací kombinatoriky.

### Opakování kombinatoriky

#### Základní kombinatorické postupy

- Pokud možnosti výběru navzájem kombinujeme, získáme celkový počet možností násobením.
- Pokud můžeme možnosti rozdělit do množin s prázdným průnikem, získáme celkový počet možností součtem.

#### Základní způsoby sestavování $k$ -tic

- Pokud z  $n$  prvků vybíráme  $k$  a tvoříme z nich uspořádanou  $k$ -tici, ve které se žádný prvek nesmí opakovat, máme  $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$  možností (variace).
- Pokud z  $n$  prvků vybíráme  $n$  a tvoříme z nich uspořádanou  $n$ -tici (tedy pouze měníme pořadí již vybraných prvků), ve které se žádný prvek nesmí opakovat, máme  $P(n) = n!$  možností (permutace).
- Pokud z  $n$  prvků vybíráme  $k$  a tvoříme z nich neuspořádanou  $k$ -tici, ve které se žádný prvek nesmí opakovat, máme  $K_k(n) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$  možností (kombinace).
- Pokud z  $n$  prvků vybíráme  $k$  a tvoříme z nich uspořádanou  $k$ -tici, ve které se každý prvek může opakovat maximálně  $k$ -krát, máme  $V'_k(n) = n^k$  možností (variace s opakováním).
- Pokud tvoříme uspořádanou  $k$ -tici z  $n$  prvků, kde se první opakuje  $k_1$ -krát, druhý  $k_2$ -krát až  $n$ -tý  $k_n$ -krát (tedy jen měníme pořadí již vybraných prvků), máme  $P'(k_1; k_2; \dots; k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$  možností (permutace s opakováním).
- Pokud z  $n$  prvků vybíráme  $k$  a tvoříme z nich neuspořádanou  $k$ -tici, ve které se každý prvek může opakovat nejvýše  $k$ -krát, máme  $K'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$  možností (kombinace s opakováním).

**Př. 1:** Do třídy chodí 12 kluků a 18 dívek. Sestav zadání libovolné kombinatorické úlohy o této třídě, jejímž řešením bude číslo: a)  $12+18$                       b)  $12 \cdot 18$ .

a)  $12+18$

Sčítáme možnosti  $\Rightarrow$  dáváme dohromady možnosti, které nemají žádný průnik.

Kolika způsoby je možné ze třídy vybrat jednoho zástupce do školní rady?

b)  $12 \cdot 18$

Násobíme možnosti  $\Rightarrow$  vytváříme výsledný počet tým, že kombinujeme možnosti.

Kolika způsoby je možné ze třídy vybrat dvojici kluk-holka, která přednese poděkování na maturitním plese?

**Př. 2:** Sestav typické příklady, jejichž řešením jsou následující kombinatorické hodnoty. Jednotlivé body řeš v náhodném pořadí (nezachovávej pořadí v zadání) na zvláštní papír.

a)  $V_3(6)$       b)  $P(6)$       c)  $K_3(6)$       d)  $V'_3(6)$       e)  $P'(6,3)$        $K'_3(6)$

a)  $V_3(6)$

Variace 3. řádu bez opakování z 6 prvků  $\Rightarrow$  z 6 prvků vybíráme tři a uspořádáváme je.

Turnaje se účastní 6 týmů. Kolika způsoby mohou být obsazena první tři místa (stupně vítězů)?

b)  $P(6)$

Permutace 6 prvků  $\Rightarrow$  uspořádáváme 6 prvků.

Turnaje se účastní 6 týmů. Kolik existuje možných výsledných pořadí?

c)  $K_3(6)$

Kombinace bez opakování 3 prvků z 6  $\Rightarrow$  z 6 prvků vybíráme 3, nezáleží na pořadí vybrání.

Turnaje se účastní 6 týmů. Kolika způsoby můžeme vybrat tři týmy, které budou zařazeny do skupiny A?

d)  $V'_3(6)$

Variace 3. řádu z opakováním z 6 prvků  $\Rightarrow$  z 6 (druhů) prvků vybíráme tři a uspořádáváme je, prvky se mohou opakovat.

Kolik tří znakových hesel je možné sestavit ze šesti různých znaků?

e)  $P'(6,3)$

Permutace s opakováním ze 3 a 6 prvků  $\Rightarrow$  máme dva druhy prvků, od jednoho 3 a od druhého 6 kusů, hledáme všechna možná uspořádání.

Kolik čísel můžeme sestavit ze 3 jedniček a 6 dvojek?

$K'_3(6)$

Trojčlenné kombinace s opakováním z 6 prvků  $\Rightarrow$  máme 6 (druhů) prvků, které se mohou opakovat, vybíráme 3, nezáleží na pořadí.

Kolik částek můžeme zaplatit třemi mincemi, pokud máme k dispozici dostatečné množství 6 druhů mincí (1, 2, 5, 10, 20, 50 korun)?

**Pedagogická poznámka:** Papír s úlohami každý žák předá některému ze spolužáků (lépe do jiné lavice), který pak příklady vyřeší a tím zkontroluje, zda byly zadány správně. Případné spory řeší učitel.

**Shrnutí:**