9.1.16 Kombinatorické úlohy s opakováním II

Předpoklady: 9115

Př. 1: Doplň tabulku.

		prvky se mohou opakovat
	variace $V_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!}$	
měníme pořadí již vybraných prvků		
vybíráme prvky, nezáleží na pořadí		

	prvky se neopakují	prvky se mohou opakovat
vybíráme prvky, záleží na pořadí	variace $V_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!}$	variace s opakováním $V'_k(n)=n^k$
měníme pořadí již vybraných prvků	permutace $P(n)=n!$	permutace s opakováním $P'(k_1;k_2;...;k_n)=\frac{(k_1+k_2+...+k_n)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot...\cdot k_n!}$
vybíráme prvky, nezáleží na pořadí	kombinace $K_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$	kombinace s opakováním $K'_k(n)=\binom{n+k-1}{k}$

Př. 2: Kolik různých znaků je možné zapsat pomocí 2 byte (16 jedniček a nul)?

Vytváříme uspořádanou šestnáctici ze dvou různých čísel (1 a 0) $\Rightarrow$ na každou pozici máme dvě možnosti $\Rightarrow$ $2\cdot 2\cdot ...\cdot 2=2^{16}=65536$ možností (znaků).

Př. 3: a) Kolik „slov" je možné sestavit z písmen slova KOLOTOL?
b) Kolik z nich neobsahuje všechna tři O vedle sebe?
c) V kolika z nich nejsou vedle sebe dvě souhlásky ani dvě samohlásky?
d) V kolika slovech se nevyskytují žádná dvě písmena O vedle sebe?

a) Možnosti prohození písmen $\Rightarrow$ musíme určit, kolik písmen se v původním slově kolikrát opakuje.
K, T … 1 x
L … 2 x
O … 3 x

$\Rightarrow$ písmena ve slově KOLOTOL můžeme proházet $\frac{7!}{3!\cdot 2!}=420$ způsoby.

b) Kolik slov neobsahuje tři OOO vedle sebe?

Přímý výpočet je obtížný (více různých možností žádná O vedle sebe, dvě O vedle sebe) $\Rightarrow$ určíme počet slov, kde jsou všechna tři O vedle sebe: $5!$ možností (tři O považujeme za jedno písmeno, dvě písmena L) $\Rightarrow$ počet slov, kde nejsou všechna tři O vedle sebe:
$\frac{7!}{3!\cdot 2!}-\frac{5!}{2!}=360$.

c) V kolika slovech nejsou vedle sebe dvě souhlásky ani dvě samohlásky?
Souhlásky a samohlásky se musejí střídat (jako v původním slově) $\Rightarrow$ jediné, co můžeme měnit, je rozestavení souhlásek $\Rightarrow$ $\frac{4!}{2!}=12$ možností (počet možností, jak proházet souhlásky).

d) V kolika slovech se nevyskytují žádná dvě písmena O vedle sebe?
Pokud se písmena O nemají vyskytovat vedle sebe, musíme je oddělit alespoň jedním z ostatních písmen $\Rightarrow$ $\square K \square L \square T \square L \square$ z pěti možných míst pro písmeno O vybíráme tři $\Rightarrow$ $\binom{5}{3}$ možností (nezáleží, kterou pozici pro O vybereme jako první).

Souhlásky můžeme mezi sebou prohazovat: $\frac{4!}{2!}$ možností.

Celkem $\binom{5}{3}\cdot\frac{4!}{2!}=120$ možností.

Př. 4: Kolik pěticiferných čísel dělitelných 5 je možné sestavit z číslic:
a) 1, 2, 3, 4, 5, b) 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Číslo je dělitelné pěti $\Rightarrow$ končí na číslici 5 nebo 0.
a) sestavujeme z číslic 1, 2, 3, 4, 5
Píšeme postupně možnosti na jednotlivé cifry: $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 1=5^4=625$ možností (jako poslední cifru musíme napsat 5).
b) sestavujeme z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5
Píšeme postupně možnosti na jednotlivé cifry: $5\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 2=10\cdot 6^3=2160$ možností (jako poslední cifru musíme napsat 5 nebo 0, jako první cifru nemůžeme napsat 0).

Př. 5: Do restaurace na oběd přišlo 6 hostů, kteří si mohou vybrat ze čtyř hotových jídel. Kolika možnostmi může vybírání jídel hosty dopadnout:
a) z pohledu šéfkuchaře, b) z pohledu hostů?
Předpokládej, že všech jídel je dostatek i pro případ, že by si všichni hosté objednali to samé.

Jaký je rozdíl mezi pohledem šéfkuchaře a hostů? Hostům záleží na tom, kdo z nich si vybral jaké jídlo (Petr guláš není to samé jako Honza guláš), šéfkuchaře zajímá počet a druh jídel (3 x guláš, 2 x svíčková, 1x utopenci).
a) z pohledu šéfkuchaře
Šéfkuchaře zajímá pouze počet a druh jídel $\Rightarrow$ nezáleží na pořadí, ve kterém si hosté objednávali $\Rightarrow$ vybíráme šest jídel ze čtyř druhů bez ohledu na pořadí $\Rightarrow$ šestičlenné kombinace s opakováním ze čtyř prvků.

$K'_6(4)=\binom{6+4-1}{6}=\binom{9}{6}=84$ možností.

b) z pohledu hostů
Z pohledu hostů záleží na pořadí (tedy na tom, které jídlo si kdo objednal) $\Rightarrow$ každý z nich má čtyři možnosti výběru jídla $\Rightarrow$ celkem $4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4=4^6=4096$ možností.

Pedagogická poznámka: Když diskutujete o rozdílu mezi pohledem hostů a šéfkuchaře, stačí zopakovat, co si zapisuje číšník a co potom hlásí do kuchyně.

Př. 6: V pytlíku je šest koulí očíslovaných mocninami tří od 3^1 do 3^6. Náhodně z pytlíku táhneme jednu kouli a zapíšeme si číslo, kterým je označená. Kolik různých součtů můžeme takto získat po třech tazích pokud:
a) taženou kouli do pytlíku nevracíme,
b) taženou kouli do pytlíku vracíme (a můžeme ji tedy táhnout znova)?

Zajímá nás součet tažených čísel $\Rightarrow$ nezáleží na pořadí, ve kterém jsme koule táhli $\Rightarrow$ vytváříme kombinace.
a) taženou kouli do pytlíku nevracíme
Každou kouli můžeme vytáhnout pouze jednou $\Rightarrow$ vytváříme kombinace bez opakování $\Rightarrow$
$K_3(6)=\binom{6}{3}$ možností.
b) taženou kouli do pytlíku vracíme (a můžeme ji tedy táhnout znova)
Jednu kouli můžeme vytáhnout při všech pokusech $\Rightarrow$ čísla se mohou opakovat $\Rightarrow$ vytváříme kombinace s opakováním $\Rightarrow$ $K'_3(6)=\binom{6+3-1}{3}=\binom{8}{3}=56$ možností.

Př. 7: Urči, kolika způsoby může dopadnout hod třemi kostkami, pokud kostky:
a) jsou všechny stejné (a nemůžeme je tedy rozlišit),
b) mají různé barvy (a můžeme je tedy rozlišit).

Na každé kostce může padnout šest různých čísel.
a) kostky jsou všechny stejné (a nemůžeme je tedy rozlišit)
Nezáleží na tom, na které kostce padlo konkrétní číslo (nejsme schopni kostky rozlišit) $\Rightarrow$ vybíráme neuspořádaně tři čísla z šesti (která se mohou opakovat) $\Rightarrow$ celkem
$K'_3(6)=\binom{6+3-1}{3}=\binom{8}{3}=56$ možností.

b) kostky mají různé barvy (a můžeme je tedy rozlišit)
Kostky mají různé barvy $\Rightarrow$ jednu zapisujeme jako první, další jako druhou a poslední jako třetí $\Rightarrow$ na každé z těchto míst máme šest možností, které navzájem kombinujeme $\Rightarrow$ celkem $V'_3(6)=6\cdot6\cdot6=6^3=216$ možností.

Př. 8: V pytlíku je šest koulí očíslovaných od 1 do šesti. Náhodně z pytlíku táhneme jednu kouli a zapíšeme si číslo tahu a číslo na vylosované kouli. Kolik různých výsledků můžeme takto získat po třech tazích pokud:

a) taženou kouli do pytlíku nevracíme,
b) taženou kouli do pytlíku vracíme (a můžeme ji tedy táhnout znova).

Zapisujeme si číslo tahu $\Rightarrow$ rozlišujeme, zda jsme konkrétní číslo vytáhli poprvé, podruhé nebo potřetí $\Rightarrow$ obsazujeme výsledky jednotlivých tahů.
a) taženou kouli do pytlíku nevracíme
Možné výsledky jednotlivých tahů:
1. tah … 6 možností,
2. tah … 5 možností (jedna koule tažena v předchozím tahu),
3. tah … 4 možnosti (dvě koule taženy v předchozích dvou tazích),
$\Rightarrow$ možnosti pro jednotlivé tahy spolu můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$ celkem $6\cdot 5\cdot 4 = V_3(6) = 120$ možností.
b) taženou kouli do pytlíku vracíme (a můžeme ji tedy táhnout znova)
Možné výsledky jednotlivých tahů:
1. tah … 6 možností,
2. tah … 6 možností (jedna koule tažena, ale vrácena),
3. tah … 6 možnosti (dvě koule taženy, ale ihned vráceny),
$\Rightarrow$ možnosti pro jednotlivé tahy spolu můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$ celkem $6\cdot 6\cdot 6 = V_3'(6) = 6^3 = 216$ možností.

Př. 9: Petr má na maturitní ples k dispozici 8 lístků ke dvěma malým stolům, od kterých je vidět na parket, 8 lístků k velkému stolu, od kterého na parket vidět není, a 15 lístků k stání. Kolika způsoby může lístky rozdělit mezi 30 „kamarádů“, když 4 lístky k jednomu ze dvou stolů, od kterých na parket vidět je, rezervuje pro rodiče? Místa u jednotlivých stolů nejsou číslovaná, uvedeno je pouze číslo stolu.

4 lístky rezervuje pro rodiče $\Rightarrow$ máme pouze dvě možnosti, jak dobré lístky rozdělit mezi rodiče a kamarády (první nebo druhý dobrý stůl).
Zbývá lístků: $4+8+15=27$ lístků $\Rightarrow$ 3 „kamarádi“ nedostanou lístek $\Rightarrow$ musíme uspořádat 4 a 8 a 15 a 3 (jakoby) lístků do řady $\Rightarrow$ permutace s opakováním $\Rightarrow$ $\frac{30!}{4!\cdot 8!\cdot 15!\cdot 3!}$ možností, jak rozdělit lístky mezi kamarády $\Rightarrow$ $2\cdot\frac{30!}{4!\cdot 8!\cdot 15!\cdot 3!} \doteq 6{,}99\cdot 10^{13}$ možností, jak provést celou distribuci.

Shrnutí: