

## 9.1.16 Další vlastnosti kombinačních čísel

**Předpoklady:** 9108, 9109

Kombinační čísla udávají počet kombinací bez opakování = neuspořádaných  $k$ -tic sestavených z  $n$  prvků bez opakování.

Platí:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  - počet možností jak vybrat z  $n$  prvků  $k$  bez ohledu na pořadí (jde jen o to, které prvky jsme vybrali a nezáleží na tom, v jakém pořadí jsme výběr provedli).

**Př. 1:** Urči dosazením hodnoty kombinačních čísel:  $\binom{n}{0}$ ,  $\binom{n}{1}$ ,  $\binom{n}{n}$ . Své výsledky kombinatoricky zdůvodni.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1! \cdot n!} = 1$$

Kolika způsoby můžeme z  $n$  prvků vybrat žádný? Jedním, nevybereme nic.

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = n$$

Kolika způsoby můžeme z  $n$  prvků vybrat jeden? Kterýkoliv  $n$  prvků si můžeme nechat  $\Rightarrow n$  možností.

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

Kolika způsoby můžeme z  $n$  prvků vybrat všech  $n$ ? Jedním, vybereme všechny.

Další pravidlo už známe, platí:  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

Kombinatorické zdůvodnění je snadné: Když vybíráme  $k$  prvků do kombinace, zbude v množině  $n-k$  prvků, které tvoří také kombinaci, ale  $n-k$ -člennou  $\Rightarrow k$ -prvkových kombinací z  $n$  prvků bez opakování je stejně jako  $n-k$  prvkových (vznikají společně).

Poslední kombinatorické pravidlo je nejsložitější:

**Pro všechna celá nezáporná čísla  $n, k$ ,  $k < n$ , platí:**  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ .

Důkaz předchozí věty je snadný například na tomto konkrétním příkladě:

4B2007 má  $n = 29$  studentů a  $n+1$ -ního matikáře Krynického. Kolika způsoby je možné z množiny 4B2007+Krynický vybrat  $k+1 = 10$  lidí?

Vytváříme desetičlenné kombinace bez opakování z 30 prvků  $\Rightarrow$  celkem  $\binom{30}{10} = \binom{n+1}{k+1}$

možností.

Vytvořené kombinace můžeme rozdělit do dvou skupin:

- kombinace bez Krynického: je jich  $\binom{29}{10} = \binom{n}{k+1}$  (vybíráme 10 lidí ze 29 studentů 4B2007),
- kombinace s Krynickým: je jich  $\binom{29}{9} = \binom{n}{k}$  (vybíráme 9 lidí ze 29 studentů 4B2007 a přidáváme k nim Krynického),

vypsané dvě skupiny tvoří dohromady všech hledané kombinace  $\Rightarrow$  platí:  $\binom{30}{10} = \binom{29}{10} + \binom{29}{9}$ ,

a tedy obecně  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ .

**Př. 2:** (BONUS) Dokaž vztah  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$  dosazením do definice kombinačního čísla.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-[k+1])!} = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \left( \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-k)(k+1)} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)k! \cdot (n-k)(n-k-1)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Všechny předchozí vzorce se používají při úpravách výrazů, které obsahují kombinační čísla:

**Př. 3:** Vyjádři jedním kombinačním číslem:

$$\text{a) } \binom{20}{9} + \binom{20}{10} \quad \text{b) } \binom{15}{9} + \binom{15}{5} \quad \text{c) } \binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5}$$

$$\text{a) } \binom{20}{9} + \binom{20}{10}$$

Použijeme vzorec  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \Rightarrow \binom{20}{9} + \binom{20}{10} = \binom{21}{10}$ .

$$\text{b) } \binom{15}{9} + \binom{15}{5}$$

Na vzorec:  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$  nemáme správná kombinační čísla (potřebujeme aby se hodnoty  $k$  lišily o jedna)  $\Rightarrow$  například místo  $\binom{15}{5}$  bychom potřebovali  $\binom{15}{10}$ , naštěstí platí vztah  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  a tedy  $\binom{15}{5} = \binom{15}{10} \Rightarrow \binom{15}{9} + \binom{15}{5} = \binom{15}{9} + \binom{15}{10} = \binom{16}{10}$ .

$$\text{c) } \binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5}$$

na vzorec:  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$  nemáme na začátku výrazu správná kombinační čísla, místo

$\binom{5}{5}$  bychom potřebovali  $\binom{6}{6}$ , naštěstí platí vztah  $\binom{n}{n} = 1$  a tedy  $\binom{5}{5} = 1 = \binom{6}{6} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5} &= \binom{6}{6} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5} = \\ &= \binom{7}{6} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5} = \binom{8}{6} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5} = \binom{9}{6} + \binom{9}{5} = \binom{10}{6} \end{aligned}$$

**Pedagogická poznámka:** U bodů b) i c) budou žáci na zčátku zřejmě potřebovat trochu

postrčit. V bodě b) pouze uveďte použití vzorce  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  a neříkejte přesně

jak. Mezi řešeními pak budou obě možnosti a bude možné si ověřit, že oběma postupy dojdou k různým kombinačním číslům, které se sobě rovnají.

Díky vztahům pro kombinační čísla můžeme sestavit zajímavý obrazec.

**Př. 4:** Opiš následující obrazec a vedle něj ho zapiš ještě jednou s tím, že místo kombinačních čísel zapíšeš jejich hodnoty.

$$\begin{array}{cccc}
 & & \binom{0}{0} & \\
 & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 1 \\
 & & 1 & 1 \\
 & 1 & 2 & 1 \\
 1 & 3 & 3 & 1
 \end{array}$$

**Př. 5:** Dopiš do pravého trojúhelníku s hodnotami kombinačních čísel další řádku. Svůj výsledek zkontroluj dopsáním další řádky do trojúhelníku s kombinačními čísly.

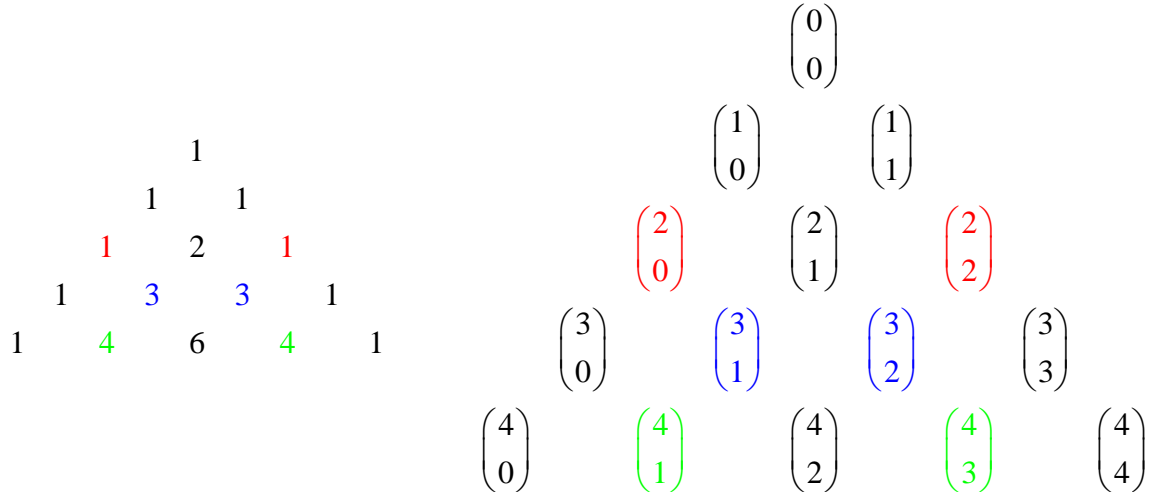
$$\begin{array}{cccc}
 & & & \binom{0}{0} \\
 & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 & & 1 & & \\
 & & 1 & 1 & \\
 & 1 & 2 & 1 & \\
 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4}
 \end{array}$$

Obrazci, který jsme sestavovali se říká **Pascalův trojúhelník** (podle známého fyzika a matematika B. Pascala). Protože je celý sestavený z kombinačních čísel, dají se na něm demonstrovat vztahy, které pro ně platí.

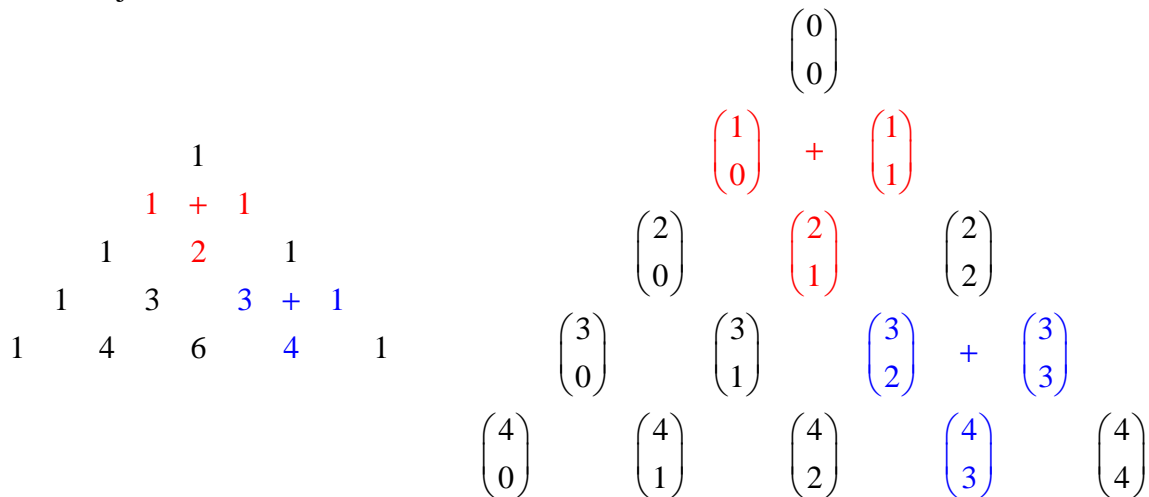
**Př. 6:** Demonstruj na Pascalově trojúhelníku platnost vztahů pro kombinační čísla.

a)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$                       b)  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

a)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \Rightarrow$  Pascalův trojúhelník je souměrný podle svislé osy (kombinační čísla stejné nečerné barvy mají stejnou hodnotu).



b)  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \Rightarrow$  Kombinační čísla, která nejsou na bočních stranách trojúhelníka získáme jako součet kombinačních čísel nad nimi.



Vzorce, které jsme probrali v první části hodiny, se mohou hodit při řešení některých rovnic nebo nerovnic.

**Př. 7:** Napiš sedmý řádek Pascalova trojúhelníka.

Sedmý řádek je sestavený z kombinačních čísel, která mají nahoře šestku  $\Rightarrow$

$\binom{6}{0} \binom{6}{1} \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6}$ , po dosazení: 1   6   15   20   15   6   1.

**Pedagogická poznámka:** Rovnice s kombinačními čísly jsou zařazeny až na konec hodiny, protože nejsou důležité z hlediska další probírané látky a tak není nutné, aby je stihli vypočítat všichni.

**Př. 8:** Vyřeš rovnici  $11\binom{x}{5} + 11\binom{x}{6} = 7\binom{x+2}{7}$ .

**Problém:** Při řešení předchozích rovnic s kombinačními čísly jsme kombinační čísla rozepisovali do tvaru, který umožňoval řešení klasickými metodami  $\Rightarrow$  při použití v tomto případě hrozí velké mocniny  $x$ .

$\Rightarrow$  Zkusíme dostat rovnici do tvaru  $( ) = ( )$ .

$$11\left[\binom{x}{5} + \binom{x}{6}\right] = 7\binom{x+2}{7} \quad \text{Vzorec: } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

$$11\binom{x+1}{6} = 7\binom{x+2}{7} \quad \text{Přepíšeme kombinační čísla na faktoriály.}$$

$$11 \frac{(x+1)!}{6! \cdot (x+1-6)!} = 7 \frac{(x+2)!}{7! \cdot (x+2-7)!}$$

$$11 \frac{(x+1)!}{6! \cdot (x-5)!} = 7 \frac{(x+2)(x+1)!}{7 \cdot 6! \cdot (x-5)!}$$

$$11 = x + 2$$

$$x = 9$$

$$K = \{9\}$$

**Př. 9:** Vyřeš rovnici  $\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-3} = \binom{x+1}{3}$ .

Stejný postup jako v předchozím příkladu.

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-3} = \binom{x+1}{3}$$

$$\binom{x+1}{x-2} = \binom{x+1}{3} \quad \text{Vzorec } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \Rightarrow \binom{x+1}{x-2} = \binom{x+1}{3}.$$

$$\binom{x+1}{3} = \binom{x+1}{3} \Rightarrow \text{Tato rovnost platí vždy pokud je kombinační číslo definováno } \Rightarrow$$

$$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \quad (\text{ostatní podmínky jsou v tomto případě splněny také}).$$

$$K = \{x \in \mathbb{N}; x \geq 3\}$$

**Př. 10:** Petáková:

strana 143/cvičení 22 b) c) d) f)

strana 143/cvičení 23 a) b) c) d)

strana 143/cvičení 24 a) b)

**Shrnutí:** Vlastnosti kombinačních čísel je možné snadno odvodit z Pascalova trojúhelníka.

