9.1.17 Další vlastnosti kombinačních čísel

Předpoklady: 9108, 9109

Kombinační čísla udávají počet kombinací bez opakování = neuspořádaných *k*-tic sestavených z *n* prvků bez opakování.

Platí: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ - počet možností jak vybrat z *n* prvků *k* bez ohledu na pořadí (jde jen o to, které prvky jsme vybrali a nezáleží na tom, v jakém pořadí jsme výběr provedli).

Př. 1: Urči dosazením hodnoty kombinačních čísel: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n}$. Své výsledky kombinatoricky zdůvodni.

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\cdot(n-0)!}=\frac{n!}{1!\cdot n!}=1$$

Kolika způsoby můžeme z *n* prvků vybrat žádný? Jedním , nevybereme nic.

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{1!\cdot(n-1)!}=n$$

Kolika způsoby můžeme z *n* prvků vybrat jeden? Kterýkoliv z *n* prvků si můžeme nechat $\Rightarrow$ n možností.

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!\cdot(n-n)!}=\frac{n!}{n!\cdot 0!}=1$$

Kolika způsoby můžeme z *n* prvků vybrat všech *n*? Jedním, vybereme všechny.

Další pravidlo už známe, platí: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Kombinatorické zdůvodnění je snadné: Když vybíráme *k* prvků do kombinace, zbude v množině $n-k$ prvků, které tvoří také kombinaci, ale $n-k$ -člennou $\Rightarrow$ *k*-prvkových kombinací z *n* prvků bez opakování je stejně jako $n-k$ prvkových (vznikají společně).

Poslední kombinatorické pravidlo je nejsložitější:

Pro všechna celá nezáporná čísla *n*, *k*, $k<n$, platí: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Důkaz předchozí věty je snadný například na tomto konkrétním příkladě:
4B2007 má $n=29$ studentů a $n+1$-ního matikáře Krynického. Kolika způsoby je možné z množiny 4B2007+Krynický vybrat $k+1=10$ lidí?

Vytváříme desetičlenné kombinace bez opakování z 30 prvků $\Rightarrow$ celkem $\binom{30}{10}=\binom{n+1}{k+1}$ možností.
Vytvořené kombinace můžeme rozdělit do dvou skupin:

- kombinace bez Krynického: je jich $\binom{29}{10}=\binom{n}{k+1}$ (vybíráme 10 lidí z 29 studentů 4B2007),
- kombinace s Krynickým: je jich $\binom{29}{9}=\binom{n}{k}$ (vybíráme 9 lidí z 29 studentů 4B2007 a přidáváme k nim Krynického),

vypsané dvě skupiny tvoří dohromady všechny hledané kombinace $\Rightarrow$
platí: $\binom{30}{10}=\binom{29}{10}+\binom{29}{9}$,
a tedy obecně $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Př. 2: (BONUS) Dokaž vztah $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ dosazením do definice kombinačního čísla.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-[k+1])!}=$$
$$=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)(n-k-1)!}+\frac{n!}{(k+1)\cdot k!\cdot(n-k-1)!}=$$
$$=\frac{n!}{k!\cdot(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{n!}{k!\cdot(n-k-1)!}\cdot\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)}=$$
$$=\frac{n!}{k!\cdot(n-k-1)!}\cdot\frac{n+1}{(n-k)(k+1)}=\frac{(n+1)n!}{(k+1)k!\cdot(n-k)(n-k-1)!}=$$
$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1}$$

Všechny předchozí vzorce se používají při úpravách výrazů, které obsahují kombinační čísla:

Př. 3: Vyjádři jedním kombinačním číslem:
a) $\binom{20}{9}+\binom{20}{10}$ b) $\binom{15}{9}+\binom{15}{5}$ c) $\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}+\binom{9}{5}$

a) $\binom{20}{9}+\binom{20}{10}$
Použijeme vzorec $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1} \Rightarrow \binom{20}{9}+\binom{20}{10}=\binom{21}{10}$.

b) $\binom{15}{9}+\binom{15}{5}$

Na vzorec: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ nemáme správná kombinační čísla (potřebujeme aby se hodnoty k lišily o jedna) $\Rightarrow$ například místo $\binom{15}{5}$ bychom potřebovali $\binom{15}{10}$, naštěstí platí vztah $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ a tedy $\binom{15}{5}=\binom{15}{10}$ $\Rightarrow$ $\binom{15}{9}+\binom{15}{5}=\binom{15}{9}+\binom{15}{10}=\binom{16}{10}$.

c) $\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}+\binom{9}{5}$

na vzorec: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ nemáme na začátku výrazu správná kombinační čísla, místo $\binom{5}{5}$ bychom potřebovali $\binom{6}{6}$, naštěstí platí vztah $\binom{n}{n}=1$ a tedy $\binom{5}{5}=1=\binom{6}{6}$ $\Rightarrow$

$$\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}+\binom{9}{5}=\binom{6}{6}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}+\binom{9}{5}=$$
$$=\binom{7}{6}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}+\binom{9}{5}=\binom{8}{6}+\binom{8}{5}+\binom{9}{5}=\binom{9}{6}+\binom{9}{5}=\binom{10}{6}$$

Pedagogická poznámka: U bodů b) i c) budou žáci na začátku zřejmě potřebovat trochu postrčit. V bodě b) pouze uveďte použití vzorce $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ a neříkejte přesně jak. Mezi řešeními pak budou obě možnosti a bude možné si ověřit, že oběma postupy dojdou k různým kombinačním číslům, která se sobě rovnají.

Díky vztahům pro kombinační čísla můžeme sestavit zajímavý obrazec.

Př. 4: Opiš následující obrazec a vedle něj ho zapiš ještě jednou s tím, že místo kombinačních čísel zapíšeš jejich hodnoty.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

Př. 5: Dopiš do pravého trojúhelníku s hodnotami kombinačních čísel další řádku. Svůj výsledek zkontroluj dopsáním další řádky do trojúhelníku s kombinačními čísly.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Obrazci, který jsme sestavovali se říká **Pascalův trojúhelník** (podle známého fyzika a matematika B. Pascala). Protože je celý sestavený z kombinačních čísel, dají se na něm demonstrovat vztahy, které pro ně platí.

Př. 6: Demonstruj na Pascalově trojúhelníku platnost vztahů pro kombinační čísla.

a) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ b) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

a) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ $\Rightarrow$ Pascalův trojúhelník je souměrný podle svislé osy (kombinační čísla stejné nečerné barvy mají stejnou hodnotu).

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

b) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ $\Rightarrow$ Kombinační čísla, která nejsou na bočních stranách trojúhelníka získáme jako součet kombinačních čísel nad nimi.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & + & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & + & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & + & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & + & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Vzorce, které jsme probrali v první části hodiny, se mohou hodit při řešení některých rovnic nebo nerovnic.

Př. 7: Napiš sedmý řádek Pascalova trojúhelníka.

Sedmý řádek je sestavený z kombinačních čísel, která mají nahoře šestku $\Rightarrow$

$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$, po dosazení: 1 6 15 20 15 6 1.

Pedagogická poznámka: Rovnice s kombinačními čísly jsou zařazeny až na konec hodiny, protože nejsou důležité z hlediska další probírané látky a tak není nutné, aby je stihli vypočítat všichni.

Př. 8: Vyřeš rovnici $11\binom{x}{5}+11\binom{x}{6}=7\binom{x+2}{7}$.

Problém: Při řešení předchozích rovnic s kombinačními čísly jsme kombinační čísla rozepisovali do tvaru, který umožňoval řešení klasickými metodami $\Rightarrow$ při použití v tomto případě hrozí velké mocniny *x*.

$\Rightarrow$ Zkusíme dostat rovnici do tvaru $(\ )=(\ )$.

$11\left[\binom{x}{5}+\binom{x}{6}\right]=7\binom{x+2}{7}$ Vzorec: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

$11\binom{x+1}{6}=7\binom{x+2}{7}$ Přepíšeme kombinační čísla na faktoriály.

$$11\frac{(x+1)!}{6!\cdot(x+1-6)!}=7\frac{(x+2)!}{7!\cdot(x+2-7)!}$$

$$11\frac{(x+1)!}{6!\cdot(x-5)!}=7\frac{(x+2)(x+1)!}{7\cdot 6!\cdot(x-5)!}$$

$11=x+2$

$x=9$ $K=\{9\}$

Př. 9: Vyřeš rovnici $\binom{x}{x-2}+\binom{x}{x-3}=\binom{x+1}{3}$.

Stejný postup jako v předchozím příkladu.

$\binom{x}{x-2}+\binom{x}{x-3}=\binom{x+1}{3}$

$\binom{x+1}{x-2}=\binom{x+1}{3}$ Vzorec $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ $\Rightarrow$ $\binom{x+1}{x-2}=\binom{x+1}{3}$.

$\binom{x+1}{3}=\binom{x+1}{3}$ $\Rightarrow$ Tato rovnost platí vždy pokud je kombinační číslo definováno $\Rightarrow$

$x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3$ (ostatní podmínky jsou v tomto případě splněny také).

$K=\{x\in N; x\geq 3\}$

Př. 10: Petáková:
strana 143/cvičení 22 b) c) d) f)
strana 143/cvičení 23 a) b) c) d)
strana 143/cvičení 24 a) b)

Shrnutí: Vlastnosti kombinačních čísel je možné snadno odvodit z Pascalova trojúhelníka.