9.1.17 Binomická věta

Předpoklady: 9116

Kdysi dávno v prvním ročníku jsme se učili vzorce na umocňování dvojčlenu.

Př. 1: V tabulce jsou vypsány vzorce pro umocňování dvojčlenu. Najdi podobnost s jinou dosud probíranou látkou.

$(a+b)^1$	$a+b$
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$(a+b)^5$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Koeficienty před mocninami *a*, *b* odpovídají řádkům Pascalova trojúhelníku.

$(a+b)^1$	$a+b$	1 1
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1

Př. 2: Napiš další řádek předchozí tabulky pro $(a+b)^6$.

Z tabulky je vidět:

- mocniny *a* se postupně snižují od hodnoty mocniny k nule,
- mocniny *b* se postupně zvyšují od nule k hodnotě mocniny,
- číselné koeficienty v mnohočlenu, odpovídají příslušnému řádku Pascalova trojúhelníku. Pro rozvoj mocniny $(a+b)^6$ potřebujeme sedmý řádek Pascalova trojúhelníku.

$$\Rightarrow (a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

Pedagogická poznámka: Objevují se problémy s prostředním členem $20a^3b^3$ (často chybí), většinou stačí upozornit na postupné snižování mocnin *a*.

Př. 3: Odhadni vzorec pro výraz $(a+b)^n$.

Budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě:

- mocniny *a* se postupně snižují od *n* k nule,
- mocniny *b* se postupně zvyšují od nule k *n*,

- číselné koeficienty v mnohočlenu, který vznikl umocněním odpovídají příslušnému řádku Pascalova trojúhelníku. Pro rozvoj mocniny $(a+b)^n$ potřebujeme $(n+1)$*-ní* řádek Pascalova trojúhelníku (řádek s kombinačními čísly s horní hodnotou *n*)

$$\Rightarrow (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Pedagogická poznámka: Naprostá většina žáků napíše vzorec správně, je dobré jim to připomenout, protože se najdou takoví, kteří se vzoreček snaží naučit ne přes zákonitosti objevené v předchozích dvou příkladech, ale písmeno od písmena.

Než si tento výsledek zapíšeme jako větu, musíme si jej alespoň trochu ověřit. Jak vznikají jednotlivé členy rozvoje?
Zkusíme si to na nejnižších mocninách:

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$.

Barevně jsme rozlišili písmenka z první a z druhé závorky $\Rightarrow$

- člen a^2 je ve výsledku pouze jednou, protože jsme měli pouze jeden člen $a \cdot a$,
- člen ab je ve výsledku dvakrát, vznikl součtem členů $a \cdot b + b \cdot a$,
- člen b^2 je ve výsledku pouze jednou, protože jsme měli pouze jeden člen $b \cdot b$.

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) =$

$= a \cdot a \cdot a + a \cdot b \cdot a + b \cdot a \cdot a + b \cdot b \cdot a + a \cdot a \cdot b + a \cdot b \cdot b + b \cdot a \cdot b + b \cdot b \cdot b =$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Barevně jsme rozlišili písmenka z první a z druhé závorky $\Rightarrow$

- člen a^3 je ve výsledku pouze jednou, protože jsme měli pouze jeden člen $a \cdot a \cdot a$,
- člen a^2b je ve výsledku třikrát, vznikl součtem členů $a \cdot b \cdot a + b \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot b$,
- člen ab^2 je ve výsledku třikrát, vznikl součtem členů $b \cdot b \cdot a + a \cdot b \cdot b + b \cdot a \cdot b$,
- člen b^3 je ve výsledku pouze jednou, protože jsme měli pouze jeden člen $b \cdot b \cdot b$.

$\Rightarrow$ Jednotlivé členy v rozvoji vznikají součtem uspořádaných *k*-tic z *a* a *b* (při násobení nezáleží na pořadí):

- člen a^3 je v rozvoji jednou, protože existuje pouze jedna uspořádaná trojice ze tří *a*,
- člen a^2b je v rozvoji třikrát, protože existují tři uspořádané trojice ze dvou *a* a jednoho *b*,
- …

Jak určíme počet uspořádaných trojic ze dvou *a* a jednoho *b* $\Rightarrow$ permutace s opakováním ze dvou a jednoho prvku $\Rightarrow \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$ možnosti.

Jak to bude v rozvoji $(a+b)^n$ třeba u členu $a^{n-2}b^2$?

Člen obsahuje $(n-2)$ krát *a* a 2 krát *b* $\Rightarrow$ uspořádané *n*-tice z $(n-2)$ a 2 prvků $\Rightarrow$

$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$ možností.

Jak to bude v rozvoji $(a+b)^n$ třeba u členu $a^{n-k}b^k$?

Člen obsahuje $(n-k)$ krát *a* a *k* krát *b* $\Rightarrow$ uspořádané *n*-tice z $(n-k)$ a *k* prvků $\Rightarrow$

$\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ možností.

Binomická věta:
Pro všechna čísla *a*, *b* a každé přirozené číslo *n* platí:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

.

Dodatek: Pomocí sumy je zápis binomické věty značně úspornější: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

Názvosloví:

- **binom** – dvojčlen (odtud jméno věty),
- **binomický koeficient** – jiné pojmenování kombinačních čísel na pravé straně vzorce (v zahraničí se používá obecně místo termínu kombinační číslo, například v anglii binomial),
- **binomický rozvoj** – pravá strana vzorce v binomické větě.

Př. 4: (BONUS) Dokaž matematickou indukcí binomickou větu.

Postupujeme ve dvou krocích:
1. $k=1$

$$(a+b)^1=\binom{1}{0}a^1b^0+\binom{1}{1}a^{1-1}b^1=a+b \qquad \text{vzorec platí}$$

2. Předpokládáme platnost pro *k*, chceme dokázat platnost pro $k+1$.

Víme: $(a+b)^k=\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b^1+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\ldots+\binom{k}{k-1}a^1b^{k-1}+\binom{k}{k}b^k$.

Chceme sestavit vzorec pro $(a+b)^{k+1}$.

Platí:

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)=$$

$$=\left[\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b^1+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\ldots+\binom{k}{k-1}a^1b^{k-1}+\binom{k}{k}b^k\right]\cdot(a+b)$$

Zaměříme se na prostředek:

$$\left[\ldots+\binom{k}{m}a^{k-m}b^m+\binom{k}{m+1}a^{k-m-1}b^{m+1}+\ldots\right](a+b)\Rightarrow$$

$$\ldots+\binom{k}{m}a^{k-m}b^m\cdot b+\binom{k}{m+1}a^{k-m-1}b^{m+1}\cdot a+\ldots=\ldots+\binom{k}{m}a^{k-m}b^{m+1}+\binom{k}{m+1}a^{k-m}b^{m+1}+\ldots=$$

$$=\ldots+\left[\binom{k}{m}+\binom{k}{m+1}\right]a^{k-m}b^{m+1}+\ldots=\ldots+\binom{k+1}{m+1}a^{k-m}b^{m+1}+\ldots$$

Získali jsme člen rozvoje dalšího řádu $\Rightarrow$ vzorec platí i pro $k+1$.

Věta je dokázána.

Př. 5: Vypočti pomocí binomické věty:

a) $(a+b)^7$ b) $(x-y)^5$

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)^6$ d) $\left(4x-\frac{y^2}{2}\right)^4$

a)

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6b^1 + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7 =$$

$$= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

b)

$$(x-y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(-y)^1 + \binom{5}{2}x^3(-y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-y)^3 + \binom{5}{4}x^1(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5 =$$

$$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

c)

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^6 = \binom{6}{0}1^6 + \binom{6}{1}1^5\left(\sqrt{2}\right)^1 + \binom{6}{2}1^4\left(\sqrt{2}\right)^2 + \binom{6}{3}1^3\left(\sqrt{2}\right)^3 + \binom{6}{4}1^2\left(\sqrt{2}\right)^4 + \binom{6}{5}1^1\left(\sqrt{2}\right)^5 +$$

$$+\binom{6}{6}\left(\sqrt{2}\right)^6 = 1 + 6\sqrt{2} + 15\cdot 2 + 20\cdot 2\sqrt{2} + 15\cdot 4 + 6\cdot 4\sqrt{2} + 8 = 99 + 70\sqrt{2}$$

d)

$$\left(4x-\frac{y^2}{2}\right)^4 =$$

$$= \binom{4}{0}(4x)^4 + \binom{4}{1}(4x)^3\left(-\frac{y^2}{2}\right)^1 + \binom{4}{2}(4x)^2\left(-\frac{y^2}{2}\right)^2 + \binom{4}{3}(4x)\left(-\frac{y^2}{2}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(-\frac{y^2}{2}\right)^4 =$$

$$= 256x^4 - 128x^3y^2 + 24x^2y^4 - 2xy^6 + \frac{y^8}{16}$$

Pedagogická poznámka: Opět se objeví žáci, kteří se nebudou vědět rady s mínusem v druhé závorce a bude třeba jim poradit, že platí $(x-y)^5 = \left(x+[-y]\right)^5$´.

Častou chybou při počítání předchozího příkladu je, že studenti příliš pospíchají, snaží se spočítat příklad najednou a tak produkují obrovské množství chyb. Doporučuji počítat příklady tak, jak jsou uvedeny v učebnici, tedy v první fázi jenom dosadit do vzorce a dopočítávání kombinačních čísel, úpravy provádět až poté.

Př. 6: Petáková:
strana 148/cvičení 76 e) f)
strana 148/cvičení 77 a)

Shrnutí: Vzorec pro umocnění dvojčlenu $(a+b)^n$ obsahuje jako koeficienty řadu kombinačních čísel $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, …, $\binom{n}{n}$.