

9.1.19 Užití binomické věty

Předpoklady: 9118

Často nám z binomického rozvoje stačí pouze jeden konkrétní člen.

Př. 1: Urči šestý člen binomického rozvoje $\left(2xy + \frac{x}{4y^2}\right)^{12}$. Získaný výraz uprav.

Binomický rozvoj začíná: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots \Rightarrow$ šestý člen bude mít jako dolní

číslo binomického koeficientu číslo 5 \Rightarrow

$$\binom{12}{5}(2xy)^7 \left(\frac{x}{4y^2}\right)^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2^7 x^7 y^7 \frac{x^5}{4^5 y^{10}} = 11 \cdot 9 \cdot 2^3 \cdot 2^7 \frac{x^{12}}{2^{10} y^3} = \frac{99x^{12}}{y^3}.$$

Pedagogická poznámka: Vždy se najde někdo, kdo si neuvědomí, že mocniny b a spodní čísla v binomických koeficientech začínají od nuly a počítá sedmý člen místo šestého.

Př. 2: Urči člen binomického rozvoje $\left(xy - \frac{1}{2x^2}\right)^{10}$, který obsahuje y^7 .

Neznámá y se vyskytuje pouze v prvním členu původního dvojčlenu \Rightarrow hledáme člen rozvoje, který obsahuje sedmou mocninu prvního členu \Rightarrow jde o čtvrtý člen (dolní číslo binomického koeficientu se rovná 3) \Rightarrow

$$\binom{10}{3}(xy)^7 \left(-\frac{1}{2x^2}\right)^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} x^7 y^7 \left(-\frac{1}{2^3 x^6}\right) = -\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} x^7 y^7 \frac{1}{8x^6} = -15xy^7.$$

Pedagogická poznámka: Pokud chcete žákům trochu zavařit nahraďte neznámé x, y neznámými a, b . Někteří budou totálně zmateni, jiní budou potřebovat dovysvětlit zadání.

Př. 3: Urči absolutní člen (člen, který neobsahuje proměnnou) binomického rozvoje

$$\left(2x^3 + \frac{3}{2x}\right)^{12}.$$

Absolutní člen = člen, který neobsahuje neznámou \Rightarrow musíme najít taková čísla, aby platilo:

- pokrácení neznámé $\Rightarrow (x^3)^a \left(\frac{1}{x}\right)^b = 1 \Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a$,
- $a + b = 12$ (platnost binomické věty),

$\Rightarrow a + (-3a) = 12 \Rightarrow a = -3; b = 9 \Rightarrow$ hledáme desátý člen (pro $k = 10$).

$$\text{Hledaný člen: } \binom{12}{9} (2x^3)^3 \left(\frac{3}{2x}\right)^9 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} 2^3 x^9 \frac{3^9}{2^9 x^9} = 11 \cdot 5 \cdot \frac{3^9}{2^4}.$$

Př. 6: Urči součet $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$.

Součet připomíná binomický rozvoj, kterému chybí mocniny a a b . Přesně takto by však rozvoj vypadal, kdyby platilo $a = b = 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \\ & = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \cdot 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1} 1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^n = (1+1)^n = 2^n \end{aligned}$$

Správnost výsledku si můžeme zkontrolovat. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ udává počet k -prvkových podmnožin množiny s n prvky \Rightarrow výraz $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ udává počet všech podmnožin množiny n prvky, kterých je 2^n (jak jsme si říkali, když jsme probírali variace s opakováním).

Př. 7: Pomocí binomické věty dokaž, že výraz $6^n - 1$ je pro každé přirozené číslo n dělitelný pěti.

Je to divné, ale asi to opravdu funguje:

$$n = 1 \Rightarrow 6^n - 1 = 6^1 - 1 = 5 \quad \text{- je dělitelné pěti}$$

$$n = 2 \Rightarrow 6^n - 1 = 6^2 - 1 = 35 \quad \text{- je dělitelné pěti}$$

$$n = 3 \Rightarrow 6^n - 1 = 6^3 - 1 = 215 \quad \text{- je dělitelné pěti}$$

\Rightarrow Hledáme důkaz:

- dělitelnost 5 \Rightarrow z výrazu $6^n - 1$ musíme vytknout 5 (zatím tam žádná není),
- výraz $6^n - 1$ neobsahuje binomickou větu, kterou máme použít,

\Rightarrow napíšeme $6^n - 1 = (5+1)^n - 1$ a máme obojí (pětku i binomickou větu).

Použijeme binomickou větu:

$$\begin{aligned} (5+1)^n - 1 &= (a+b)^n = \left[\binom{n}{0} 5^n + \binom{n}{1} 5^{n-1} 1 + \binom{n}{2} 5^{n-2} 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1} 5 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^n \right] - 1 = \\ &= \binom{n}{0} 5^n + \binom{n}{1} 5^{n-1} 1 + \binom{n}{2} 5^{n-2} 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1} 5 \cdot 1^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{n} 1^n}_0 - 1 = \end{aligned}$$

$$= 5 \left[\binom{n}{0} 5^{n-1} + \binom{n}{1} 5^{n-2} + \binom{n}{2} 5^{n-3} 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \right]$$

Všechny členy binomického rozkladu obsahují mocniny pěti, kromě posledního, který se rovná 1 a odečte se s jedničkou, která stojí mimo binomický rozklad \Rightarrow můžeme vytknout 5 a tedy výraz $6^n - 1$ je pro každé přirozené číslo n dělitelný pěti.

Poznámka: Trik použitý v předchozím příkladu se při důkazech dělitelnosti používá často.

Př. 8: Zaokrouhli číslo $1,01^7$ na tisíciny.

Půjdeme na to přes binomickou větu.

$$\begin{aligned}1,01^7 &= (1+0,01)^7 = \\&= \binom{7}{0}1^7 + \binom{7}{1}1^6(10^{-2})^1 + \binom{7}{2}1^5(10^{-2})^2 + \binom{7}{3}1^4(10^{-2})^3 + \binom{7}{4}1^3(10^{-2})^4 + \\&+ \binom{7}{5}1^2(10^{-2})^5 + \binom{7}{6}1(10^{-2})^6 + \binom{7}{7}(10^{-2})^7 = \\&= \binom{7}{0}1^7 + \binom{7}{1}10^{-2} + \binom{7}{2}10^{-4} + \binom{7}{3}10^{-6} + \binom{7}{4}10^{-8} + \binom{7}{5}10^{-10} + \binom{7}{6}10^{-12} + \binom{7}{7}10^{-14} =\end{aligned}$$

Členy binomického rozvoje se od leva doprava postupně zmenšují (kvůli zvětšující záporné mocnině desítky) \Rightarrow musíme najít nejmenší člen, který ještě ovlivňuje výsledek na tisíciny

\Rightarrow zkusíme člen $\binom{7}{2}10^{-4} = 21 \cdot 10^{-4}$ - členy více napravo jsou ještě menší \Rightarrow

$$1,01^7 \doteq \binom{7}{0}1^7 + \binom{7}{1}10^{-2} + \binom{7}{2}10^{-4} = 1 + 7 \cdot 10^{-2} + 21 \cdot 10^{-4} = 1,0721 \doteq 1,072.$$

Číslo $1,01^7$ zaokrouhlené na tisíciny se rovná 1,072.

Dodatek: V době předkalkulačkové byla jednou z nejdůležitějších oblastí užité matematiky oblast přibližných výpočtů.

Jedním z nejběžnějších vzorců byl vztah: $(1+x)^n \doteq 1+nx$, používaný zejména v situacích, kdy $|x| \ll 1$ ($|x|$ je daleko menší než 1).

Pomocí binomické věty můžeme odhadnout chybu takového zanedbání.

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}x + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n =$$

$$1+nx + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

\Rightarrow Chyba zanedbání $|(1+x)^n - (1+nx)|$ je rovna absolutní hodnotě vynechaných členů binomického rozvoje:

$$|(1+x)^n - (1+nx)| = \left| \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \right| = |x^2| \left| \binom{n}{2} + \binom{n}{3}x + \dots + \binom{n}{n}x^{n-2} \right|$$

$$\text{platí: } |a_1 + a_2 + \dots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| \Rightarrow$$

$$|(1+x)^n - (1+nx)| = |x^2| \left| \binom{n}{2} + \binom{n}{3}x + \dots + \binom{n}{n}x^{n-2} \right| \leq |x^2| \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}|x| + \dots + \binom{n}{n}|x^{n-2}| \right]$$

Dále víme, že $|x| < 1 \Rightarrow \binom{n}{3}|x| < \binom{n}{3}$, ..., $\binom{n}{n}|x^{n-2}| < \binom{n}{n}$, a ještě $|x^2| = x^2$

$$\text{a tedy: } |x^2| \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}|x| + \dots + \binom{n}{n}|x^{n-2}| \right] < x^2 \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \right].$$

Pro součet kombinačních čísel v závorce platí: $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} < 2^n$,

celkově tedy dostáváme: $\left| (1+x)^n - (1+nx) \right| < x^2 \cdot 2^n$.

V konkrétním případě u příkladu 7 by horní odhad chyby vyšel:
 $0,01^2 \cdot 2^7 = 0,0128$.

Př. 9: Petáková:

strana 148/cvičení 83

strana 149/cvičení 86

strana 149/cvičení 90

strana 149/cvičení 92 a) c) e)

strana 149/cvičení 99 b) d)

Shrnutí: