9.2.1 Náhodné pokusy, možné výsledky, jevy

Předpoklady: 9110, 9114

Pedagogická poznámka: Hodinu je třeba dotáhnout v kuse, druhý den si už nikdo nepamatuje význam jednotlivých jevů v konci hodiny.

Hodím šipku před sebe $\Rightarrow$ za normálních okolností jediný výsledek = spadne na zem.
Hodíme šipku na terč $\Rightarrow$ několik možných výsledků (trefíme desítku, devítku, …, střela půjde zcela vedle) = **náhodný pokus –** i když se snažíme vždy o stejné provedení (a stejný výsledek - trefení desítky), získáváme různé výsledky, které závisí na náhodě.

Př. 1: Jmenuj některé další náhodné pokusy a naopak pokusy, které nemůžeme označit za náhodné.

Nejběžnější náhodné pokusy:
- hod hrací kostkou,
- hod mincí,
- sejmutí karty z balíčku,
- losování sportky,
- měření rychlosti molekul vzduchu,
- testování účinnosti nového léku,
- zkoumání výnosů nové plodiny,
- pokus o umělé oplodnění (vlastně i oplodnění přirozenou cestou).

Pokusy, které nemůžeme považovat za náhodné:
- zfialovění fenolftaleinu v zásaditém prostředí,
- zapálení sirky vhozené do ohně,
- zničení auta, které narazí v plné rychlosti do stěny.

Pokud začneme i jevy, které se nezdají být náhodné, pozorovat podrobněji, zjistíme náhodné maličkosti (jak fenolftalein obarvuje zkumavku, kde sirka chytne, jakým směrem odlétne kus krytu předního světla…).
V minulosti byla náhodnost pokusů brána jako důsledek nedostatečné znalosti počátečních podmínek (kdybychom věděli přesně, jak jsme kostku hodili a jak vypadá podložka, měli bychom být schopni spočítat, jaké číslo padne), dnes víme, že ani teoreticky není možné některé pokusy (hlavně v mikrosvětě) předpovědět jinak než jako náhodné pokusy s pravděpodobnostmi různých výsledků.

Co potřebujeme na prozkoumání náhodného pokusu?
Musíme znát všechny možné výsledky, kterými pokus může dopadnout a které splňují dvě podmínky:
- navzájem se vylučují (nemohou nastat dva naráz),
- jeden z nich nastane vždy,

$\Rightarrow$ **množina všech možných výsledků pokusu** (značíme Ω), jednotlivé výsledky (prvky množiny všech možných výsledků) značíme ω.

Podle náhodného pokusu, který zkoumáme, může být Ω konečná (naše případy) i nekonečná.

Př. 2: Urči množinu všech možných výsledků při následujících náhodných pokusech:
a) hod klasickou hrací kostkou, b) hod mincí,
c) sejmutí karty na začátku hry (vyšší vyhrává, mariášové karty).

a) hod klasickou hrací kostkou
Na kostce může padnout šest různých hodnot $\Rightarrow$ $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

b) hod mincí
Mince má dvě strany (rub a líc) $\Rightarrow \Omega = \{r;l\}$.

c) sejmutí karty na začátku hry (vyšší vyhrává)
V balíčku je osm hodnot karet $\Rightarrow$ $\Omega = \{7;8;9;10,\mathit{spodek};\mathit{svršek};\mathit{král};\mathit{eso}\}$.

Pedagogická poznámka: Občas se někdo diví, že do množiny všech možných výsledků může patřit i něco jiného než číslo.

V některých případech má množina tolik prvků, že se spokojíme s tím, že určíme jejich počet a nepokoušíme se je všechny vypsat.

Př. 3: Do třídy 4B2009 chodí 31 studentů. Urči kolika způsoby může dopadnout losování:
a) šesti studentů, kteří budou postupně maturovat v první maturitní den,
b) tří studentů, kteří zajistí vázy na květiny pro maturitní komisi.

a) losování šesti studentů, kteří budou postupně maturovat v první maturitní den
Šest studentů vybíráme, maturovat budou postupně $\Rightarrow$ záleží na tom, kterého vybereme jako prvního a kterého jako druhého, vybíráme ze 31, bez opakování a záleží na pořadí $\Rightarrow$
$31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26 = \frac{31!}{25!} = V_6(31)$ možností, prvků Ω.

b) losování tří studentů, kteří zajistí vázy na květiny pro maturitní komisi
Tři studenti musí zajistit vázy, nezáleží na tom, kterého vybereme jako prvního $\Rightarrow$ vybíráme ze 31 bez opakování, nezáleží na pořadí $\Rightarrow$ sestavujeme tříčlenné kombinace bez opakování
$\Rightarrow$ $K_3(31) = \binom{31}{3} = \frac{31!}{28!\cdot 3!}$ možností, prvků Ω.

Tak už je jasné, že budeme kombinatoriku docela často potřebovat.

Pedagogická poznámka: Z pedagogického hlediska není slovní zadání předchozího příkladu nejvhodnější. Jakmile se objevilo slovo maturita, propadla třída panice a začaly se ozývat vzdechy: „Radši o tom ani nemluv!“ ….

V některých případech můžeme množinu všech možných výsledků sestavovat více způsoby.

Př. 4: Sestav množinu všech možných výsledků náhodného pokusu hod třemi stejnými mincemi. Existuje více možností, jak množinu sestavit?

První přístup: mince jsou stejné a nerozlišujeme je $\Rightarrow$ Ω má čtyři prvky:
$\Omega = \{(3r);(2r,1l);(1r;2l);(3l)\}$.

Druhý přístup: všímáme si, na které z mincí, co padlo $\Rightarrow$ rozlišujeme mince mezi sebou $\Rightarrow$ Ω má osm prvků: $\Omega = \{(r,r,r);(r,r,l);(r,l,r);(l,r,r);(r,l,l);(l,r,l);(l,l,r);(l,l,l)\}$.

Ačkoliv se zdá, že první přístup je bližší skutečnosti (pokud mince hodíme najednou, budeme je těžko rozlišovat) a je jednodušší (množina Ω má méně prvků), v počtu pravděpodobnosti je daleko výhodnější druhý postup, protože všechny **možnosti jsou v něm rovnocenné** („stejně pravděpodobné“) a v takovém případě jsou všechny úvahy snazší (je zřejmé, že v prvním přístupu jsou možnosti $(2r,1l);(1r;2l)$ pravděpodobnější než možnosti zbývající, protože mohou nastat třemi způsoby).

Zásada: Pokud to bude jen trochu možné, budeme množinu všech možných výsledků sestavovat tak, aby všechny výsledky v této množině byly rovnocenné.

Vrátíme se k našemu pokusu se třemi mincemi. Množina všech možných výsledků má osm prvků: $\Omega = \{(r,r,r);(r,r,l);(r,l,r);(l,r,r);(r,l,l);(l,r,l);(l,l,r);(l,l,l)\}$. Zjišťovat, zda nastala pouze možnost (r,l,l), není příliš zajímavé. Zajímá nás například, zda na všech mincích padlo to samé $\Rightarrow$ takový výsledek nemáme, ale máme dva výsledky, které tuto podmínku splňují, pokud je dáme dohromady vytvoří **podmnožinu množiny** Ω, které říkáme **jev**. Jevy většinou značíme velkými písmeny: $A = \{(r,r,r);(l,l,l)\}$ - jev *A*, že na všech mincích padlo to samé.

Jev $A = \{(r,r,r);(l,l,l)\}$ (na všech mincích padlo to samé), budeme používat v následujících dvou příkladech.

Př. 5: Urči výpisem následující jevy, které mohou nastat při hodu třemi mincemi:
b) jev *B*, při hodu padl na alespoň jedné minci rub a alespoň na jedné líc,
c) jev *C*, při hodu padl alespoň dvakrát líc,
d) jev *D*, při hodu padl jenom líc.

b) jev *B*, při hodu padl na alespoň jedné minci rub a alespoň na jedné líc
$B = \{(r,r,l);(r,l,r);(l,r,r);(r,l,l);(l,r,l);(l,l,r)\}$

c) jev *C*, při hodu padl alespoň dvakrát líc
$C = \{(r,l,l);(l,r,l);(l,l,r);(l,l,l)\}$

d) jev *D*, při hodu padl jenom líc
$D = \{(l,l,l)\}$

Celá oblast jevů má svoji terminologii.

- $E = \emptyset$ = **nemožný jev** (například: „padnou čtyři líce“, jev je pouze jeden, ale popsat ho můžeme mnoha způsoby).
- $F = \Omega$ = jistý jev (například: „padne kombinace líců a rubů“).
- $(l,l,r) \in B$ (obecně $\omega \in B$), **výsledek ω je příznivý jevu *B***.
- $D \subset C$ = jev *D* je **podjevem** jevu *C*.
- Jev $A \cap B$ je **průnikem** jevů *A* a *B* a nastává pokud **nastávají najednou** jevy *A* a *B*.
- Jev $A \cup B$ je **sjednocením** jevů *A* a *B* a nastává pokud **nastává alespoň jeden** z jevů *A* a *B*.
- Je-li $A \cap B = \emptyset$ = jevy *A* a *B* se **navzájem vylučují**.
- A' = **jev opačný** k jevu *A* (nastává právě tehdy, když jev *A* nenastává).

Př. 6: Pro předchozí příklad hodu třemi mincemi (a ukázkový jev *A*) najdi:
a) jev, který je podjevem jevu *C*,
b) jev, který se vylučuje s jevem *B*,
c) jev opačný k jevu *B*,
d) jev, který je průnikem jevů *B* a *C*,
e) jev, který je sjednocením jevů *A* a *C*.

a) jev, který je podjevem jevu *C*
Podjevem jevu *C* je například jev *D* (padly jenom líce),
jiný další podjev $E = \{(r,l,l);(l,r,l);(l,l,r)\}$ - „padly dva líce a jeden rub“.

b) jev, který se vylučuje s jevem *B*
S jevem *B* se vylučuje jev $A = \{(r,r,r);(l,l,l)\}$, nebo jev $D = \{(l,l,l)\}$.

c) jev opačný k jevu *B*
Opačným jevem k jevu *B* je jev $A = \{(r,r,r);(l,l,l)\}$ (jev *D* opačný není, protože neobsahuje výsledek (r,r,r)).

d) jev, který je průnikem jevů *B* a *C*
Platí: $B \cap C = E$.

e) jev, který je sjednocením jevů *A* a *C*
Sjednocením jevů *A* a *C* je jev $F = \{(r,r,r);(r,l,l);(l,r,l);(l,l,r);(l,l,l)\}$ - „nepadl právě jeden líc“.

Shrnutí: Množinu všech možných výsledků se snažíme sestavit tak, aby všechny její prvky byly rovnocenné.