9.2.2 Pravděpodobnost

Předpoklady: 9201

Pedagogická poznámka: První příklad je opakovací, nemá cenu se s ním zabývat více než pět minut.

Př. 1: Osudí obsahuje čtyři barevné koule: bílou, fialovou, zelenou, a modrou. Při pokusu náhodně najednou vytáhneme z osudí dvě koule.
a) Sestav množinu Ω (množinu všech možných výsledků pokusu).
b) Najdi výsledky příznivé jevu M (tažena modrá koule) a B (tažena bílá koule).
c) Urči jevy $M \cup B$ a $M \cap B$.
U všech jevů urči počet příznivých výsledků.

a) Sestav množinu Ω (množinu všech možných výsledků pokusu).
Všechny možné dvojice ze čtyř možností, nezáleží na uspořádání
$\Omega = \{(b,f);(b,z);(b,m);(f,z);(f,m);(z,m)\}$ (všechny výsledky jsou rovnocenné), 6 prvků.

b) Najdi výsledky příznivé jevu M (tažena modrá koule) a B (tažena bílá koule).
$M = \{(b,m);(f,m);(z,m)\}$ - 3 prvky
$B = \{(b,f);(b,z);(b,m)\}$ - 3 prvky

c) Urči jevy $M \cup B$ a $M \cap B$.
$M \cup B = \{(b,f);(b,z);(b,m);(f,m);(z,m)\}$ - 5 prvků
$M \cap B = \{(b,m)\}$

Pedagogická poznámka: Objevují se dotazy, proč u tohoto příkladu nerozlišujeme, kterou kouli jsme táhli první a kterou druhou. Není to rozumné ze dvou důvodů:
Neodpovídá to situaci, protože koule vytáhneme naráz. Pocit, že jedna z nich je první, je spíše důsledkem zápisu než způsobu, kterým probíhá pokus.
Všechny zapsané možnosti jsou stejně pravděpodobné, proto není třeba hledat jiný způsob zápisu množiny Ω, který zajistil stejnou pravděpodobnost všech výsledků.

Musíme si ujasnit, co si představit pod pojmem pravděpodobnost.
Budeme zkoumat hod mincí. Každá mince má dvě strany: stranu s hodnotou (líc, panna) a stranu se státním znakem (rub, orel).

Dodatek: Označení panna pochází z korunových mincí ČSSR na jejichž líci byla ženská postava sázející lipovou ratolest. Na rubové straně mincí bývá státní znak, orel je památkou na rakousko-uherské orlice.

Pedagogická poznámka: Všichni žáci provedou dvacet hodů. Ukážeme si mé výsledky z učebnice (pokud házím, stejně začínám s hodnotami z učebnice a nově naházené použiji později). Po provedení a prodiskutování druhé sady hodů, otevřu excelovskou tabulku, postupně do ní přidáváme žákovské výsledky a sledujeme, jak se celková relativní četnost mění.

Ukázalo se, že někteří žáci mají problémy i s hodem mincí, proto je lepší jeden hod ukázat a připomenout, že mince by se ve vzduchu měla točit.

Provedení hodu není příliš důležité, pokud se mince během letu točí. Minci necháme dopadnout na jednu ruku, poté ji překlopíme na druhou. Je jasné, že po překlopení bude vidět pouze jedna z jejich stran.
Jaká je pravděpodobnost, že padne líc? Protože se hod mincí používá při losování, předpokládáme, že jde o spravedlivý postup $\Rightarrow$ pravděpodobnosti obou výsledků by měly být stejné a tedy 50%.

Jak to dopadne při dvaceti hodech?
Výsledky:

hod	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
výsledek	l	l	l	r	r	l	l	r	l	r	l	l	l	r	r	r	l	l	l	r

Uskutečnili jsme 20 hodů, padl 12x líc a 8x rub.

Ve statistice se číslo 12 nazývá **četnost** výsledku líc, 8 je četnost výsledku rub.

Daleko názornější je však podíl četnosti a počtu hodů – **relativní četnost** ν.

Př. 2: Urči relativní četnost, se kterou padal při našem pokusu líc, a relativní četnost, se kterou padal rub.

Relativní četnost líce: $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}=0,6=60\%$.
Relativní četnost rubu: $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}=0,4=40\%$.

Pedagogická poznámka: Poté, co jsi všichni spočítají relativní četnosti svých výsledků diskutujeme o tom, proč nevyšel u většiny mincí stejný počet líců i rubů. Během diskuse se objeví dvě převládající vysvětlení uvedené níže. Poté se snažíme přijít na to, jak obě tyto hypotézy potvrdit nebo vyvrátit.

Jak je možné, že četnosti obou výsledků nebyly stejné (10 líců a 10 rubů)? K podobnému výsledku došla většina házejících.
Možná vysvětlení:
- Tato konkrétní mince je falešná, častěji na ní padá líc a není možné s ní spravedlivě losovat.
- To, že pravděpodobnost obou výsledků je 50 % neznamená, že při dvaceti hodech padne stejný počet líců i rubů.

Jak tyto hypotézy vyvrátit nebo potvrdit?
Provedeme dalších dvacet hodů:
- Pokud jsou mince, u kterých padl nestejný počet líců a rubů falešné, měl by i při druhé dvacítce hodů padnout přibližně stejný nepoměr.
- Pokud je nestejný počet výsledků při prvním házení způsoben náhodou, měl by se poměr dosažený během prvních dvaceti hodů často lišit od poměru dosaženého během druhých dvaceti hodů.

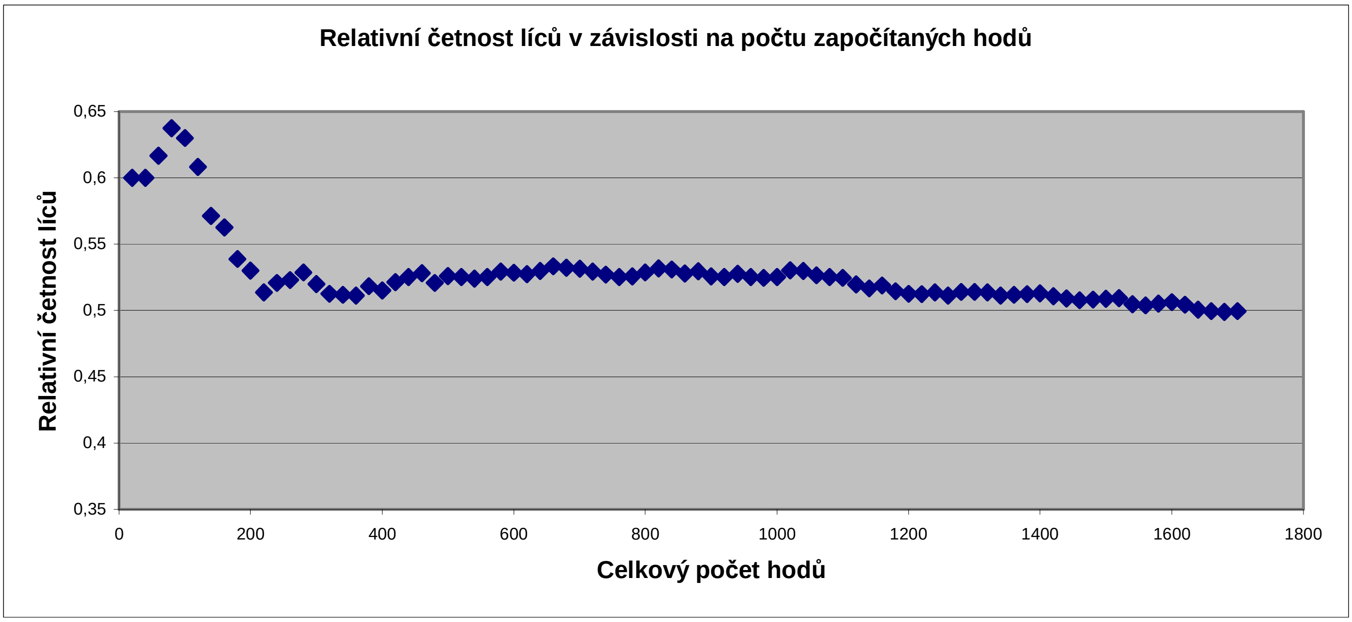
Zdá se, že opravdu hraje roli náhoda:

- u některých mincí, kde poprvé padlo více líců, podruhé padlo více rubů (nebo naopak),
- u některých mincí, zůstal nepoměr zachován,
- u jiných mincí, kde byl poměr při prvním házení vyrovnaný (nebo téměř vyrovnaný), se naopak objevil nepoměr,
- …

Kde je ale ve výsledcích pravděpodobnost 50 %?

Zřejmě se skutečná pravděpodobnost projeví až ve chvíli, kdy provedeme opravdu hodně pokusů. Co znamená opravdu hodně?
Budeme předpokládat, že mince nejsou falešné, a dáme všechny pokusy dohromady a budeme sledovat jak se relativní četnost líců mění s počtem provedených hodů. Pokud se vliv náhody s počtem hodů bude zmenšovat, měla by se relativní četnost v průměru přibližovat k 0,5.

Pedagogická poznámka: K dávání pokusů dohromady používám excelovský soubor hod_minci_prazdny.xls, do kterého stačí vyplňovat řádek s počtem líců. Vše ostatní se průběžně dopočítává a žáci tak mohou sledovat, jak se relativní četnost mění. Tabulka je předpřipravena až do sloupce HZ, je možné ji snadno natáhnout dál. V případě že budete zaznamenávat více než 1800 hodů, je nutné po klepnutí pravým tlačítkem na body grafu *Zdrojová data* a rozšířit je za sloupec *CH*, který je v grafu nastaven kvůli měřítku osy *x*.



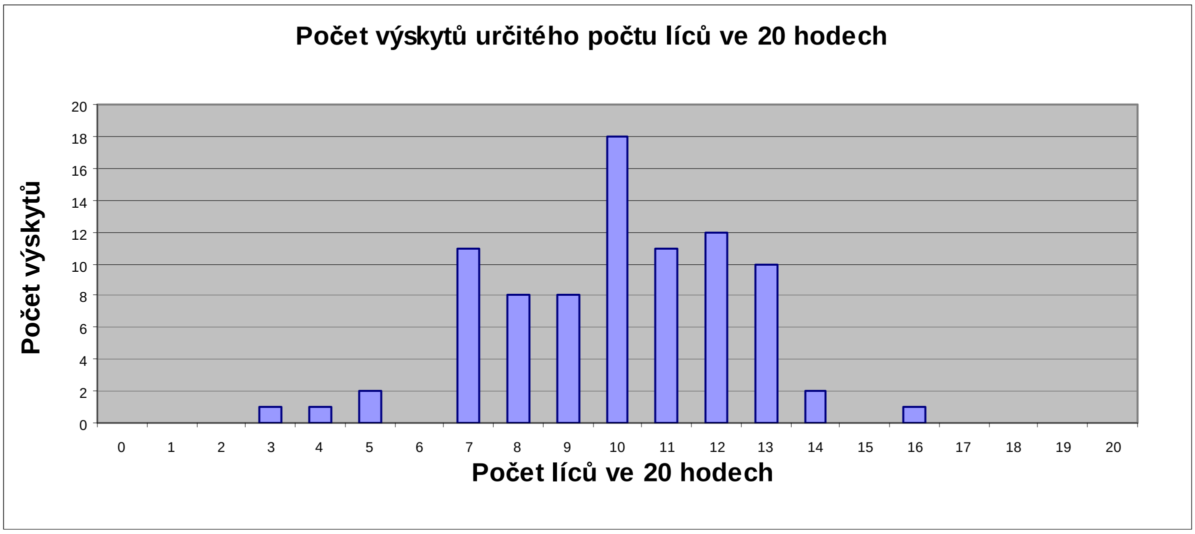
Z grafu je vidět, že se relativní četnost líců mění. V postupně se přibližuje k hodnotě 0,5, občas odchylka od hodnoty 0,5 zvětší, ale s rostoucím počtem pokusů se odchylky od hodnoty 0,5 v průměru neustále zmenšují.

⇒ **Zákon velkých čísel**: Při velkém počtu pokusů se relativní četnost blíží teoretické hodnotě pravděpodobnosti.

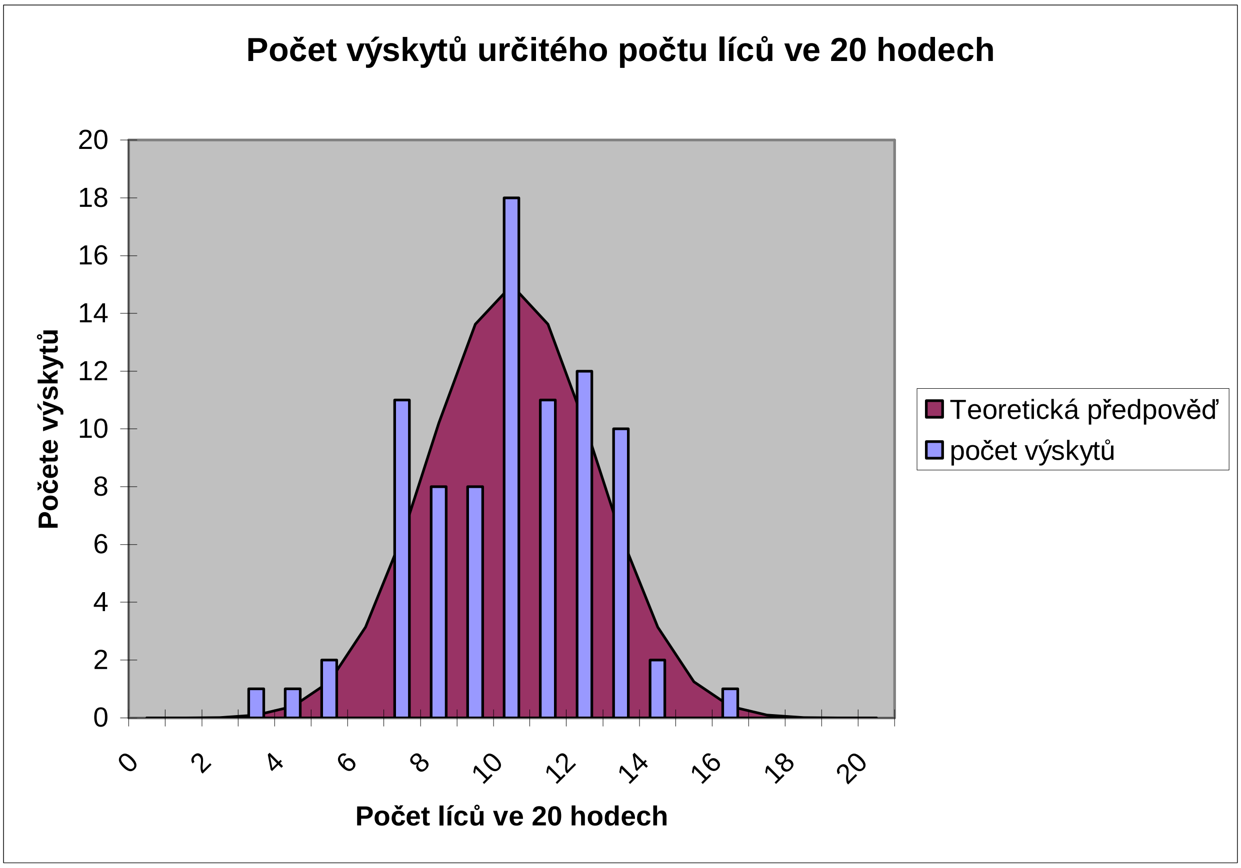
Z našeho pokuse se zdá, že pro určení pravděpodobnosti padnutí líce a rubu je dostatečně mnoho asi 1500 pokusů.

Pedagogická poznámka: V souboru je kromě grafu závislosti relativní četnosti na počtu hodů i graf, který znázorňuje, kolikrát se vyskytl každý možný počet líců ve 20 hodech. Pokud si ho žáci všimnou a začnou ho komentovat, je možné se jich zeptat, jaký tvar by očekávali v ideálním případě (nebo při dostatečně velkém počtu pokusů) a pak jim na druhém listu ukázat porovnání s teoretickou předpovědí.

Můžeme sledovat i četnosti určitého počtu líců ve 20 hodech.



Graf můžeme porovnat s teoretickou předpovědí.



Tady je vidět, že provedení 85 pokusů s 20 hody ještě není dostatečný počet na přesnější přiblížení k teoretické předpovědi (přesto základní shoda již je zřejmá – vyrovnanější počty líců a rubů padají s daleko větší pravděpodobností).

Zkušenost: Při velkém počtu hodů jsou relativní četnosti líců i rubů přibližně stejné.
Teorie: Oba výsledky hodu jsou stejně možné (stejně pravděpodobné).

$\Rightarrow$ Pravděpodobnost padnutí líce (i pravděpodobnost padnutí rubu) je $\frac{1}{2}$.

Př. 3: Rozhodni, která z následujících tvrzení můžeme označit jako důsledek tvrzení „pravděpodobnost padnutí líce je $\frac{1}{2}$“.

a) Pokud z 20 hodů padne 15 líců, je mince falešná.
b) Rub i líc padají se stejnou pravděpodobností.
c) Když hodíme dvakrát, padne jednou rub a jednou líc.
d) Při velkém počtu pokusů se relativní četnost líce (rubu) bude blížit $\frac{1}{2}$.
e) Z deseti hodů padne pětkrát líc.
f) Pokud padl zrovna rub, příště padne líc.
g) Když hodíme víckrát, bude relativní četnost blíže k $\frac{1}{2}$.
h) Když provedeme 2000 hodů, tak určitě nepadne 1900 líců.

a) Pokud z 20 hodů padne 15 líců, je mince falešná.

Není pravda. 20 hodů je málo pokusů, může padnout s nezanedbatelnou pravděpodobností náhodně i 15 líců.

b) Rub i líc padají se stejnou pravděpodobností.

Pravda. Jsou dva možné výsledky, když má jeden pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, musí mít druhý výsledek pravděpodobnost $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ oba výsledky mají stejnou pravděpodobnost.

c) Když hodíme dvakrát, padne jednou rub a jednou líc.
Není pravda. Pravděpodobnost nepředvídá výsledky dvou konkrétních hodů.

d) Při velkém počtu pokusů se relativní četnost líce (rubu) bude blížit $\frac{1}{2}$.

Pravda.

e) Z deseti hodů padne pětkrát líc.
Není pravda. Pravděpodobnost nepředvídá četnosti deseti konkrétních hodů.

f) Pokud padl zrovna rub, příště padne líc.
Není pravda. Pravděpodobnost nic neříká o výsledku dvou konkrétních hodů.

g) Když hodíme víckrát, bude relativní četnost blíže k $\frac{1}{2}$.

Není pravda. I při našem pokusu neznamenalo pokaždé přičtení dalších hodů přiblížení relativní četnosti k $\frac{1}{2}$. Pouze platilo, že odchylky od $\frac{1}{2}$ se postupně zmenšovaly.

h) Když provedeme 2000 hodů, tak určitě nepadne 1900 líců.
Není pravda. Pravděpodobnost nepředvídá s jistotou konkrétní výsledky libovolného počtu pokusů. Výsledek 1900 líců z 2000 hodů je u férové mince krajně nepravděpodobný, ale může k němu dojít.

Výsledky předchozího příkladu můžeme shrnout i takto:

Tvrzení „pravděpodobnost padnutí líce je $\frac{1}{2}$“ znamená (mimo jiné):

- Rub i líc padají se stejnou pravděpodobností.
- Při velkém počtu pokusů se relativní četnost líce (rubu) bude blížit $\frac{1}{2}$.

Tvrzení „pravděpodobnost padnutí líce je $\frac{1}{2}$“ **rozhodně neznamená**:

- Pokud z 20 hodů padne 15 líců, je mince falešná.
- Když hodíme dvakrát, padne jednou rub a jednou líc.
- Z deseti hodů padne pětkrát líc.
- Pokud padl zrovna rub, příště padne líc.
- Když hodíme víckrát, bude relativní četnost blíže k $\frac{1}{2}$.
- Když provedeme 2000 hodů, tak určitě nepadne 1900 líců.

Př. 4: Urči pravděpodobnost, že u férové hrací kostky padne 6.

Hrací kostka: 6 možností, všechny stejně pravděpodobné $\Rightarrow$ pravděpodobnost, že padne jeden konkrétní výsledek je $\frac{1}{6}$.

Řešení předchozího příkladu můžeme zobecnit:

Má-li pokus *m* možných výsledků a jsou-li všechny tyto výsledky stejně možné, říkáme o každém z nich, že má pravděpodobnost $\frac{1}{m}$.

Pravděpodobnost $\frac{1}{6}$ pro padnutí libovolného čísla na hrací kostce platí pouze v případě, že kostka je ideální (není falešná). Tajnou úpravou kostky je možné dosáhnout například toho, že bude častěji padat šestka. V takovém případě je pravděpodobnost padnutí šestky větší. Její přibližnou hodnotu můžeme určit jenom tím, že provedeme velký počet hodů a spočteme relativní četnost šestek. Přesnou hodnotu pravděpodobnosti pak pokládáme za neznámou konstantu, která leží blízko spočtené relativní četnosti. Ve všech výpočtech o takto upravené kostce pak hodnotu relativní četnosti používáme jako aktuálně nejlepší známou hodnotu pravděpodobnosti (lepší hodnotu bychom získali provedením většího počtu pokusů).

Př. 5: Ve velké počítačové firmě během jednoho roku selhalo z 22 400 harddisků 739. Jaká je pravděpodobnost selhání disku?

Relativní četnost poruchy: $\frac{739}{22400} = 0,033$.
Pravděpodobnost selhání disku je číslo blízké číslu 0,033.

Př. 6: Z 65351 nově prodaných osobních automobilů stejné značky a typu mělo během dvou let poruchu, která vyžadovala servisní zásah 3986 vozů. Urči pravděpodobnost poruchy tohoto vozu během prvních dvou let používání.

Relativní četnost poruchy vozu: $\frac{3986}{65351} = 0,061$.
Pravděpodobnost poruchy vozu v prvních dvou letech od nákupu je číslo blízké číslu 0,061.

Př. 7: V roce 2007 se v České republice narodilo 114 632 dětí, z toho 58475 chlapců, z toho v jihozápadních Čechách 13052, z toho chlapců 6562. Urči pravděpodobnost narození chlapce v ČR.

Relativní četnost narození chlapce v ČR: $\frac{58475}{114632} = 0,510$.
Pravděpodobnost narození chlapce v ČR bude ležet blízko hodnoty 0,510 (počty dětí, které se narodily pouze v části republiky nejsou pro výpočet v celé ČR důležité, pokud započtené do celkové statistiky).

Př. 8: Urči pravděpodobnost sejmutí esa při snímání mariášových karet.

Karty obsahují osm různých hodnot, všechny se vyskytují ve stejném počtu $\Rightarrow$ všechny mohou být sejmuty se stejnou pravděpodobností $\Rightarrow$ pravděpodobnost sejmutí esa je $\frac{1}{8}$.

Př. 9: Urči pravděpodobnost výhry v 1. pořadí ve sportce.

Sportka: 49 čísel, táhneme 6 (dodatkové číslo se pro výhru v prvním pořadí nepočítá) $\Rightarrow$ $\binom{49}{6}$ možných výsledků tahu, všechny jsou stejně pravděpodobné $\Rightarrow$ pravděpodobnost výhry je $\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} \doteq 0,000000072$.

Př. 10: V osudí je 5 modrých, 2 zelené a 3 červené koule. Koule jsou náhodně taženy a po určení barvy zase vraceny do osudí. Urči pravděpodobnost vytažení:
a) modré, b) zelené, c) červené koule.

Pokud rozlišíme koule, je tažení každé koule stejně pravděpodobné a pravděpodobnost tažení každé z nich $\frac{1}{10}$.

Modrých koulí je 5 $\Rightarrow$ pravděpodobnost tažení modré koule je $\frac{5}{10}$.

Zelené koule jsou 2 $\Rightarrow$ pravděpodobnost tažení zelené koule je $\frac{2}{10}$.

Červené koule jsou 3 $\Rightarrow$ pravděpodobnost tažení červené koule je $\frac{3}{10}$.

Značení: Pokud je ω jeden z možných výsledků pokusu, značíme $p(\omega)$ pravděpodobnost tohoto výsledku.

Pravděpodobnosti $p(\omega)$ výsledků náhodného pokusu jsou nezáporná čísla, jejichž součet je roven jedné.

Shrnutí: Pravděpodobnost nějakého výsledku v žádném případě nepředpovídá výsledek konkrétního pokusu, ale určuje pouze hodnotu, ke které se blíží relativní četnosti při velkém množství pokusů.