9.2.2 Pravděpodobnost

Předpoklady: 9201

Pedagogická poznámka: První příklad je opakovací, nemá cenu se s ním zabývat více než pět minut.

Př. 1: Osudí obsahuje čtyři barevné koule: bílou, fialovou, zelenou, a modrou. Při pokusu náhodně najednou vytáhneme z osudí dvě koule.
a) Sestav množinu Ω (množinu všech možných výsledků pokusu).
b) Najdi výsledky příznivé jevu M (tažena modrá koule) a B (tažena bílá koule).
c) Urči jevy $M \cup B$ a $M \cap B$.
U všech jevů urči počet příznivých výsledků.

a) Sestav množinu Ω (množinu všech možných výsledků pokusu).
Všechny možné dvojice ze čtyř možností, nezáleží na uspořádání
$\Omega = \{(b,f);(b,z);(b,m);(f,z);(f,m);(z,m)\}$ (všechny výsledky jsou rovnocenné), 6 prvků.

b) Najdi výsledky příznivé jevu M (tažena modrá koule) a B (tažena bílá koule).
$M = \{(b,m);(f,m);(z,m)\}$ - 3 prvky
$B = \{(b,f);(b,z);(b,m)\}$ - 3 prvky

c) Urči jevy $M \cup B$ a $M \cap B$.
$M \cup B = \{(b,f);(b,z);(b,m);(f,m);(z,m)\}$ - 5 prvků
$M \cap B = \{(b,m)\}$

Pedagogická poznámka: Objevují se dotazy, proč u toho příkladu nerozlišujeme, kterou kouli jsme táhli první a kterou druhou. Není to rozumné ze dvou důvodů:
Neodpovídá to situaci, protože koule vytáhneme naráz. Pocit, že jedna z nich je první, je spíše důsledkem zápisu než způsobu, kterým probíhá pokus.
Všechny zapsané možnosti jsou stejně pravděpodobné, proto není třeba hledat jiný způsob zápisu množiny Ω, který zajistil stejnou pravděpodobnost všech výsledků.

Musíme si ujasnit, co si představit pod pojmem pravděpodobnost.
Budeme zkoumat hod mincí. Každá mince má dvě strany: stranu s hodnotou (líc, pana) a stranu se státním znakem (rub, orel).

Dodatek: Označení pana pochází z korunových mincí ČSSR na jejichž líci byla ženská postava sázející lipovou ratolest. Na rubové straně mincí bývá státní znak, orel je památkou na rakousko-uherské orlice.

Pedagogická poznámka: Všichni žáci provedou dvacet hodů. Ukážeme si mé výsledky z učebnice (pokud házím, stejně začínám s hodnotami z učebnice a své použiji později), po vyřešení příkladu 2 otevřu excellovskou tabulku, postupně do ní přidáváme žákovské výsledky a sledujeme, jak se pravděpodobnost mění.

Ukázalo se, že někteří žáci mají problémy i s hodem mincí, proto je lepší jeden hod ukázat a připomenou, že mince by se ve vzduchu měla toči.

Provedení hodu není příliš důležité, pokud se mince během letu točí, je jasné, že po dopadu (nebo po chycení rukou) bude vidět jedna z jejích stran.
Jaká je pravděpodobnost, že padne líc? Protože se hod mincí používá při losování a předpokládáme, že jde o spravedlivý postup $\Rightarrow$ pravděpodobnosti obou výsledků jsou stejné a tedy 50%.

Jak to dopadne při dvaceti hodech?
Výsledky:

hod	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
výsledek	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0

Uskutečnili jsme 20 hodů, padl 12x líc a 8x rub.

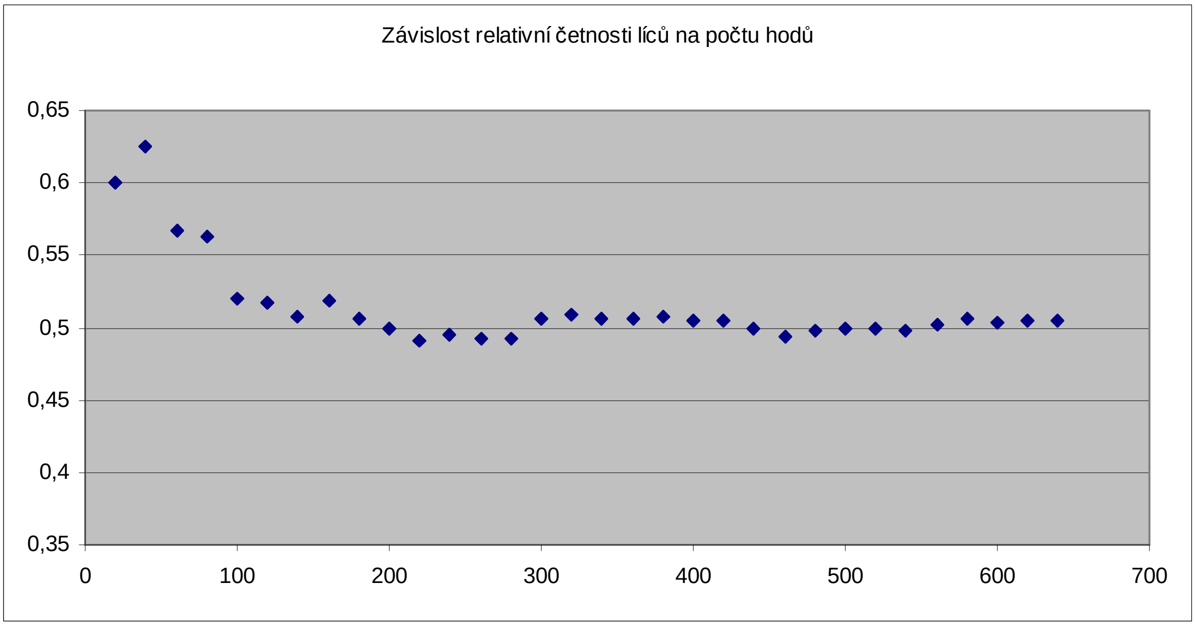
Ve statistice se číslo 12 nazývá **četnost** výsledku líc, 8 je četnost výsledku rub daleko názornější je však podíl četnosti a počtu hodů – **relativní četnost** ν.

Př. 2: Urči relativní četnost, se kterou padal při našem pokusu líc, a relativní četnost, se kterou padal rub.

Relativní četnost líce: $\frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$.
Relativní četnost rubu: $\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$.

Znamená předchozí výsledek, že líc padá s větší pravděpodobností než rub?

Zkusíme přidat další pokusy.



Z grafu je vidět, že se relativní četnost líců mění, občas dosáhne hodnoty 0,5, pak se zase změní, ale s větším počtem pokusů se odchylky od hodnoty 0,5 v průměru neustále zmenšují.

$\Rightarrow$ **Zákon velkých čísel**: Při velkém počtu pokusů se relativní četnost blíží teoretické hodnotě pravděpodobnosti.

Pedagogická poznámka: V hodině řešíme situaci tak, že dvacet hodů si provede každý student sám hned na začátku hodiny během zapisování do třídnice. Ihned po hodech zjistíme, že četnosti jsou pokaždé jiné. Poté doplníme četnosti do připraveného excellovského souboru, který ihned vypočítá relativní četnosti a kreslí graf.

Zkušenost: Při velkém počtu hodů jsou relativní četnosti líců i rubů přibližně stejné.
Teorie: Oba výsledky hodu jsou stejně možné (stejně pravděpodobné).
$\Rightarrow$ Pravděpodobnost padnutí líce (i pravděpodobnosti padnutí rubu) je $\frac{1}{2}$.

Co znamená tvrzení „pravděpodobnost padnutí líce je $\frac{1}{2}$“?

- Rub i líc padají se stejnou pravděpodobností.
- Při velkém počtu pokusů se relativní četnost líce (rubu) bude blížit $\frac{1}{2}$.

Co tvrzení „pravděpodobnost padnutí líce je $\frac{1}{2}$“ **rozhodně neznamená**:

- Když hodíme dvakrát, padne jednou rub a jednou líc.
- Z deseti hodů padne pětkrát líc.
- Pokud padl zrovna rub, příště padne líc.
- Když hodíme víckrát, bude relativní četnost blíže k $\frac{1}{2}$.

Jaká je situace u hrací kostky?

Př. 3: Urči pravděpodobnost, že u hrací kostky padne 6.

Hrací kostka: 6 možností, všechny stejně pravděpodobné $\Rightarrow$ pravděpodobnost, že padne jeden konkrétní výsledek je $\frac{1}{6}$.

Má-li pokus *m* možných výsledků a jsou-li všechny tyto výsledky stejně možné, říkáme o každém z nich, že má pravděpodobnost $\frac{1}{m}$.

Pravděpodobnost $\frac{1}{6}$ pro padnutí libovolného čísla na hrací kostce platí pouze v případě, že kostka je ideální (není falešná). Tajnou úpravou kostky je možné dosáhnout například toho, že bude častěji padat šestka. V takovém případě je pravděpodobnost padnutí šestky větší. Její přibližnou hodnotu můžeme určit jenom tím, že provedeme velký počet hodů a spočteme relativní četnost šestek. Přesnou hodnotu pravděpodobnosti pak pokládáme za neznámou konstantu, která leží blízko spočtené relativní četnosti. Ve všech výpočtech pak hodnotu relativní četnosti používáme jako aktuálně nejlepší známou hodnotu pravděpodobnosti (lepší hodnotu bychom získali provedením většího počtu pokusů).

Př. 4: Ve velké počítačové firmě během jednoho roku selhalo z 22 400 harddisků 739. Jaká je pravděpodobnost selhání disku?

Relativní četnost poruchy: $\frac{739}{22400} = 0,033$.

Pravděpodobnost selhání disku je číslo blízké číslu 0,033.

Př. 5: Z 65351 nově prodaných osobních automobilů stejné značky a typu mělo během dvou let poruchu, která vyžadovala servisní zásah 3986 vozů. Urči pravděpodobnost poruchy tohoto vozu během prvních dvou let používání.

Relativní četnost poruchy vozu: $\frac{3986}{65351} = 0,061$.

Pravděpodobnost poruchy vozu v prvních dvou letech od nákupu je číslo blízké číslu 0,061.

Př. 6: V roce 2007 se v České republice narodilo 114 632 dětí z toho 58475 chlapců, z toho v jihozápadních Čechách 13052 z toho chlapců 6562. Urči pravděpodobnost narození chlapce v ČR.

Relativní četnost narození chlapce v ČR: $\frac{58475}{114632} = 0,510$.

Relativní četnost narození chlapce v jihozápadních Čechách: $\frac{6562}{13052} = 0,503$.

Pravděpodobnost narození chlapce v ČR bude ležet blízko hodnoty 0,510 (hodnota 0,503 je spočtena z menšího počtu porodů a jen v části republiky).

Př. 7: Urči pravděpodobnost sejmutí esa při snímání mariášových karet.

Karty obsahují osm různých hodnot všechny se vyskytují ve stejném počtu $\Rightarrow$ všechny mohou být sejmuty se stejnou pravděpodobností $\Rightarrow$ pravděpodobnost sejmutí esa je $\frac{1}{8}$.

Př. 8: Urči pravděpodobnost výhry v 1. pořadí ve sportce.

Sportka: 49 čísel, táhneme 6 (dodatkové číslo se pro výhru v prvním pořadí nepočítá) $\Rightarrow$ $\binom{49}{6}$ možných výsledků tahu, všechny jsou stejně pravděpodobné $\Rightarrow$ pravděpodobnost výhry je $\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} \doteq 0,000000072$.

Př. 9: V osudí je 5 modrých, 2 zelené a 3 červené koule. Koule jsou náhodně taženy a po určení barvy zase vraceny do osudí. Urči pravděpodobnost vytažení:
a) modré, b) zelené, c) červené koule.

Pokud rozlišíme koule, je tažení každé koule stejně pravděpodobné a pravděpodobnost tažen každé z nich $\frac{1}{10}$.

Modrých koulí je 5 $\Rightarrow$ pravděpodobnost tažení modré koule je $\frac{5}{10}$.

Zelené koule jsou 2 $\Rightarrow$ pravděpodobnost tažení zelené koule je $\frac{2}{10}$.

Červené koule jsou 3 $\Rightarrow$ pravděpodobnost tažení červené koule je $\frac{3}{10}$.

Značení: Pokud je ω jeden z možných výsledků pokusu, značíme $p(\omega)$ pravděpodobnost tohoto výsledku.

Pravděpodobnosti $p(\omega)$ výsledků náhodného pokusu jsou nezáporná čísla, jejichž součet je roven jedné.

Shrnutí: Pravděpodobnost nějakého výsledku v žádném případě nepředpovídá výsledek konkrétního pokusu, ale určuje pouze hodnotu, ke které se blíží relativní četnosti při velkém množství pokusů.