9.2.3 Pravděpodobnosti jevů I

Předpoklady: 9202

Opět se vrátíme k hodu kostkou. Pokus má šest stejně pravděpodobných náhodných výsledků $\Rightarrow$ pravděpodobnost každého z nich je $\frac{1}{6}$.

Do domečku nám chybí tři políčka. Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo větší než 2 a my vyhrajeme?

Nehledáme pravděpodobnost výsledku, ale jevu, který se skládá ze čtyř možných výsledků $\{3;4;5;6\}$ $\Rightarrow$ pravděpodobnost je zřejmě $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Jak jsme získali zlomek $\frac{4}{6}$?

Sečetli jsme pravděpodobnosti výsledků, které jsou jevu „číslo větší než 2“ příznivé.

Předchozí platí i obecně.

Pravděpodobnost jevu *A* (značíme $P(A)$) definujeme jako součet pravděpodobností výsledků příznivých jevu *A*.

$\Rightarrow$ Vzorcem: $P(A)=\sum_{\omega\in A} p(\omega)$.

($\sum_{\omega\in A} p(\omega)$ = součet čísel $p(\omega)$, která odpovídají prvkům $\omega\in A$)

Pokud má pokus *m* stejně pravděpodobných výsledků, je pravděpodobnost každého z nich $\frac{1}{m}$ a pravděpodobnost jevu *A* se rovná: $P(A)=\frac{m(A)}{m}$, kde $m(A)$ je počet výsledků příznivých jevu *A*.

V pokusu, jehož všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné, je pravděpodobnost jevu *A* rovna podílu $\frac{\text{počet výsledků přiznivých jevu } A}{\text{počet všech výsledků}}$.

Teď už víme, proč je důležité sestavit množinu všech výsledků tak, aby všechny výsledky byly stejně pravděpodobné. V takovém případě totiž dokážeme:

- určit pravděpodobnost jednotlivých výsledků (podíl $\frac{1}{m}$),
- určit pravděpodobnost jevů (podíl $\frac{\text{počet výsledků přiznivých jevu}}{\text{počet všech výsledků}}$).

Bez toho jsme vcelku bezmocní.

Př. 1: Urči pravděpodobnost jevu „při hodu kostkou padne prvočíslo“.

Hod kostkou $\Rightarrow$ 6 rovnocenných možností, „padne prvočíslo“ $\Rightarrow$ 3 možnosti (2, 3, 5).

Pravděpodobnost jevu „padne prvočíslo“ $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu je jediným problémem fakt, že 1 nepatří mezi prvočísla. Raději studenty upozorňuji předem, abychom neztráceli čas.

Př. 2: V osudí je 5 modrých, 3 černé, 2 žluté a 4 červené koule. Jednu vytáhneme. Urči pravděpodobnost jevu: „nevytáhneme modrou“.

Všechny výsledky jevu jsou rovnocenné, pokud se tváříme jakoby koule byly rozlišitelné $\Rightarrow$
počet všech výsledků: $5+3+2+4=14$,
počet příznivých výsledků (ne modrá koule): $3+2+4=9$.
Pravděpodobnost jevu „nevytáhneme modrou“ $\frac{9}{14}$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je vhodným okamžikem, kdy studentům ukázat, že na lepších kalkulačkách je možné počítat i kombinační čísla. Například u kalkulačky CASIO fx-991MS počítáme pomocí tlačítka **nCr** takto: $\binom{31}{7}=31\,\mathbf{nCr}\,7$. Variační číslo počítáme podobně pomocí tlačítka nPr : $V_2(4)=4\mathbf{nPr}2=12$.

Př. 3: Ve třídě je 31 studentů, v první den maturit jich maturuje 7. Urči, jaká je pravděpodobnost, že student X bude maturovat hned v prvním dnu.

Počet všech možností, jak vybrat 7 studentů z 31: $\binom{31}{7}$.
Skupina vybraných obsahuje konkrétního studenta: $\binom{30}{6}$ (vybíráme 6 studentů ze zbývajících 30).

Pravděpodobnost, že student X bude maturovat hned první den: $\frac{\binom{30}{6}}{\binom{31}{7}}=\frac{7}{31}=0,226$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je trochu záhadný. Téměř všichni studenti ho správně vyřeší tak, že rovnou napíší výsledný zlomek $\frac{7}{31}$, ale většinou nejsou schopni vysvětlit, jak se k výsledku dostali.
Za správnou považuji následující argumentaci: Maturantů je 31, a proto může maturant X maturovat jako první, druhý, třetí až třicátý první. Existuje tedy celkem 31 stejně pravděpodobných pořadí, ve kterých může maturant nastoupit ke zkoušce, pouze prvních sedm je příznivých.
Přesto je potřeba se studenty projít i řešení uvedené v učebnici, je častěji použitelné v jiných případech, kdy nejsou různá pořadí stejně pravděpodobná nebo je jejich vyjádření hodně složité.

Př. 4: Maturita z matematiky má 60 okruhů. Dan se vůbec nenaučil na 6 z nich. Při zkoušce si losuje dva okruhy.
a) Urči pravděpodobnost, že si vylosuje pouze okruhy, které umí.
b) Urči pravděpodobnost, že si vylosuje pouze okruhy, které neumí.
c) Urči pravděpodobnost, že jeden z vylosovaných okruhů umí a druhý ne.

Počet všech možných výsledků losování: $\binom{60}{2}$ (vybíráme 2 ze 60).

a) Urči pravděpodobnost, že si vylosuje pouze okruhy, které umí.

Vybíráme 2 okruhy z 54 okruhů, které umí: $\binom{54}{2} \Rightarrow$ pravděpodobnost: $\dfrac{\binom{54}{2}}{\binom{60}{2}} = 0,808$.

b) Urči pravděpodobnost, že si vylosuje pouze okruhy, které neumí.

Vybíráme 2 okruhy z 6 okruhů, které neumí: $\binom{6}{2} \Rightarrow$ pravděpodobnost: $\dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{60}{2}} = 0,008$.

c) Urči pravděpodobnost, že jeden z vylosovaných okruhů umí a druhý ne.
Vybíráme 1 okruh ze 6, které neumí, a jeden z 54, které umí $\Rightarrow$ $6 \cdot 54$ možností $\Rightarrow$ pravděpodobnost: $\dfrac{6 \cdot 54}{\binom{60}{2}} = 0,183$.

Velmi výhodná strategie řešení úloh z pravděpodobnosti:
Nejdříve určíme počet všech možných výsledků (jmenovatel zlomku) a pak teprve určujeme počty příznivých výsledků (čitatel zlomku).

Pedagogická poznámka: Pokud studenti příklad počítají záhadným způsobem, použitým u předchozího příkladu, vyjde jim výsledek špatně. Snadno si to mohou ověřit tím, že své výsledky sečtou a ty nedají dohromady 1 (i když je jasné, že Dan nemůže táhnout žádným dalším způsobem, který není obsažen v jednom z bodů a), b), c). Naopak sečtení správných výsledků se 1 rovná.

Př. 5: Na zkoušku čeká sedm studentů mezi nimi Petr a Pavel. Pořadí studentů je určováno náhodně losem. Jaká je pravděpodobnost, že Petr a Pavel půjdou po sobě?

Losujeme pořadí $\Rightarrow$ stejné jako když studenty řadíme do řady $\Rightarrow$ permutace bez opakování $\Rightarrow$ všechny možnosti: $7!$.
Petr a Pavel vedle sebe: $2 \cdot 6!$ (spojíme je jako jednoho člověka, 2 možnosti jejich vzájemného prohození).
Pravděpodobnost, že Petr a Pavel půjdou po sobě: $\dfrac{2 \cdot 6!}{7!} = \dfrac{2}{7}$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je zařazen schválně. Studenti začnou zcela automaticky řešit vše pomocí kombinačních čísel a proto malé připomenutí permutací nezaškodí.

Př. 6: Urči pravděpodobnost výhry ve čtvrtém pořadí ve sportce. Při výhře ve čtvrtém pořadí jsou čtyři čísla ze šesti zaškrtnutých na sázence mezi šesti čísly vylosovanými při tahu (dodatkové číslo nehraje roli).

Výhru ve čtvrtém pořadí získáme, když čtyři z našich šesti vsazených čísel budou mezi šesti vylosovanými.

Vybíráme čtyři ze šesti vylosovaných čísel, která trefíme $\binom{6}{4}$ možností.

Vybíráme 2 z nevylosovaných 43 čísel, která netrefíme $\binom{43}{2}$ možností.

Předchozí možnosti kombinujeme mezi sebou $\Rightarrow$ celkem $\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}$ možností.

Všechny možnosti losování: $\binom{49}{6}$ $\Rightarrow$ pravděpodobnost: $\dfrac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0,000969$.

Př. 7: 30 studentů třídy je rozděleno do pěti šesti členných skupin. Jaká je pravděpodobnost, že Petr a Pavel budou ve stejné skupině?

Rozdělování si můžeme představit tak, že postavíme studenty do řady a prvních pět tvoří první skupinu, druhých pět druhou a tak dále.
Počet možností, jak do řady postavit Petra a Pavla: $30\cdot 29$.
Jak postavit Petra a Pavla do stejné skupiny:

- počet možností jak vybrat skupinu: 5,
- počet možností, jak je postavit ve skupině: $6\cdot 5$,

celkem: $5\cdot 6\cdot 5$ možností.

Pravděpodobnost, že Petr a Pavel stojí ve stejné skupině: $\dfrac{5^2\cdot 6}{30\cdot 29} = \dfrac{5}{29}$.

Př. 8: Petáková:
strana 171/cvičení 24
strana 171/cvičení 27
strana 171/cvičení 28

Shrnutí: Při řešení úloh na výpočty pravděpodobnosti je výhodné nejdříve určit počet všech možných výsledků (jmenovatel zlomku).