9.2.4 Pravděpodobnosti jevů II

Předpoklady: 9203

Než začneme počítat, důležité připomenutí z minulých hodin: „Množinu všech možných výsledků musíme sestavovat tak, aby všechny výsledky byly rovnocenné“.

Př. 1: Urči pravděpodobnost, že při hodu třemi stejnými mincemi padne:
a) dvakrát líc a jednou rub, b) třikrát líc,
c) na všech mincích stejná strana.

Jako množinu všech možných výsledků budeme brát uspořádanou trojici typu (r,l,l) $\Rightarrow$ jako bychom mince odlišovali od sebe (neodpovídá to zcela zadání příkladu, ale takto zavedené výsledky jsou rovnocenné) $\Rightarrow$ počet všech možných výsledků: $2^3 = 8$.
a) padne dvakrát líc a jednou rub

Tři příznivé výsledky (r,l,l), (l,r,l), (l,l,r) $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{3}{8}$.

b) padne třikrát líc

Jeden příznivý výsledek (l,l,l) $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{1}{8}$.

c) padne na všech mincích stejná strana

Dva příznivé výsledky (l,l,l), (r,r,r) $\Rightarrow$ pravděpodobnosti $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Př. 2: Urči pravděpodobnost, že při deseti hodech mincí:
a) nepadne ani jeden rub, b) padne dvakrát líc a osmkrát rub,
c) padne maximálně třikrát líc.

Množina všech výsledků = všechny uspořádané desetice s dvěma opakujícími se prvky (r, l) = výsledky jednotlivých hodů $\Rightarrow$ 2^{10} možností.
a) nepadne ani jeden rub

Jediný příznivý výsledek samé líce $(l,l,...,l)$ $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \doteq 0,00098$.

b) padne dvakrát líc a osmkrát rub

Příznivé výsledky: uspořádané desetice ze dvou líců a osmi rubů $\Rightarrow$ $\frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$ možností $\Rightarrow$

pravděpodobnost: $\dfrac{\frac{10!}{2!\cdot 8!}}{2^{10}} = \frac{45}{1024} \doteq 0,044$.

c) padne maximálně třikrát líc
Musíme sečíst počty výsledků příznivých jednotlivým počtům líců:

- žádný líc $\Rightarrow$ 1 možnost,
- 1 líc (9 rubů) $\Rightarrow$ $\frac{10!}{1!\cdot 9!} = 10$,

- 2 líce (8 rubů) $\Rightarrow \dfrac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$,
- 3 líce (7 rubů) $\Rightarrow \dfrac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$,

$\Rightarrow$ celkem 176 možností $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\dfrac{176}{2^{10}} = \dfrac{176}{1024} = \dfrac{11}{64} = 0{,}169$.

Poznámka: Počet příznivých výsledků v bodě b) můžeme zapsat také jako $\binom{10}{2}$ = počet možností, jak z deseti míst vybrat dvě, na která umístíme líce (umístění rubů je tím už dané). Analogicky pak můžeme postupovat u ostatních bodů $\Rightarrow$ řešení bodu c)

$$\frac{1+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}}{2^{10}}.$$

Př. 3: Urči pravděpodobnost výsledku, který jsi dosáhl v předminulé hodině, kdy všichni házeli 20 hodů mincí.

Stejný postup jako v předchozím příkladě.
Množina všech výsledků = uspořádané dvacetice ze dvou prvků $\Rightarrow$ $2^{20} = 1048576$ možností,
příznivé výsledky (12 líců 8 rubů) = $\dfrac{20!}{12!\cdot 8!} = 125970$ $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\dfrac{125970}{1048576} = 0{,}120$.

Podobně můžeme určit pravděpodobnosti dalších výsledků našeho házení (uvádíme jenom některé výsledky s počtem líců menším než 11).

10 líců (10 rubů): $\dfrac{\frac{20!}{10!\cdot 10!}}{2^{20}} = 0{,}176$

9 líců (11 rubů): $\dfrac{\frac{20!}{9!\cdot 11!}}{2^{20}} = 0{,}160$

8 líců (12 rubů): $\dfrac{\frac{20!}{8!\cdot 12!}}{2^{20}} = 0{,}120$

7 líců (13 rubů): $\dfrac{\frac{20!}{7!\cdot 13!}}{2^{20}} = 0{,}074$

5 líců (15 rubů): $\dfrac{\frac{20!}{5!\cdot 15!}}{2^{20}} = 0{,}0149$

2 líce (18 rubů): $\dfrac{\frac{20!}{2!\cdot 18!}}{2^{20}} = 0{,}00018$

$\Rightarrow$ Z předchozích výsledků je zřejmé, proč naprostá většina pokusů skončila v rozmezí 7-13 líců ze 20 hodů (z 26 pokusů se do tohoto rozmezí nevešel jediný), pravděpodobnost ostatních výsledků je velmi malá.

Dodatek: S rostoucím počtem hodů navíc pravděpodobnost extrémních výsledků ještě velmi rychle klesá. Například při 100 hodech mincí má nejpravděpodobnější výsledek 50 líců, 50 rubů pravděpodobnost $\dfrac{\frac{100!}{50!\cdot 50!}}{2^{100}} = 0{,}080$, výsledek 20 líců, 80 rubů pravděpodobnost $\dfrac{\dfrac{100!}{20!\cdot 80!}}{2^{100}} = 0{,}0000000004$, výsledek 10 líců, 90 rubů

pravděpodobnost $\dfrac{\dfrac{100!}{10!\cdot 90!}}{2^{100}} = 1{,}37\cdot 10^{-17}$ (10^{17} je řádově stáří vesmíru v sekundách),

výsledek 0 líců, 100 rubů pravděpodobnost $\dfrac{1}{2^{100}} = 7{,}89\cdot 10^{-31}$.

Je zřejmé, že na to, že nepadne méně než 15 líců by se dal vsadit i život.

Př. 4: Urči pravděpodobnost, se kterou padne při hodu dvěma kostkami:
a) součet 7, b) součet 8.
Ještě před výpočtem odhadni, který ze součtů je pravděpodobnější.

Odhad: Oba výsledky jsou stejně pravděpodobné, protože obě hodnoty můžeme jako součet získat třemi způsoby:

- $8 = 4+4 = 5+3 = 6+2$,
- $7 = 4+3 = 5+2 = 6+1$.

Jako množinu všech možných výsledků si vybereme množinu všech uspořádaných dvojic (jako bychom kostky rozlišovali) čísel od 1 do 6 $\Rightarrow$ rozlišujeme výsledky $(5,6)$ a $(6,5)$, které jsou tak rovnocenné výsledku $(5,5)$, který může padnout jediným způsobem $\Rightarrow$ všech možných výsledků je $6\cdot 6 = 36$.

a) součet 7

Příznivé výsledky: $(6,1)$, $(1,6)$, $(5,2)$, $(2,5)$, $(4,3)$, $(3,4)$ $\Rightarrow$ 6 možností $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} \doteq 0{,}167$.

b) součet 8

Příznivé výsledky: $(6,2)$, $(2,6)$, $(5,3)$, $(3,5)$, $(4,4)$ $\Rightarrow$ 5 možností $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\dfrac{5}{36} \doteq 0{,}139$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad bude u některých studentů vyžadovat osobní diskusi. Setkal jsem se s připomínkou, že dvě čtyřky přece také mohou padnout během házení dvakrát. To samozřejmě mohou, když házíme víckrát. Příklad se ale týká jednoho hodu a proto se tato dvojice v množině všech výsledků dvakrát nevyskytuje (stejně jako se tam nevyskytuje dvakrát dvojice $(2,1)$).

Př. 5: Urči pravděpodobnost, že ve třech hodech po sobě hodíš 6.

Množina možných výsledků: tři hody se šesti možnými výsledky, hody rozlišujeme $\Rightarrow$ uspořádané trojice ze šesti čísel $\Rightarrow$ 6^3 možností.

Počet příznivých výsledků: pokaždé padne 6 $\Rightarrow$ jediná možnost $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\dfrac{1}{6^3} \doteq 0{,}0046$.

Př. 6: Urči pravděpodobnost, že ve čtyřech hodech po sobě hodíš větší číslo než 3.

Množina možných výsledků: čtyři hody se šesti možnými výsledky, hody rozlišujeme $\Rightarrow$ uspořádané čtveřice ze šesti čísel $\Rightarrow$ 6^4 možností.
Počet příznivých výsledků: musí padnou jen čísla větší než tři $\Rightarrow$ při každém hodu může padnou 4, 5 nebo6 (tři možnosti) $\Rightarrow$ 3^4 možností $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{3^4}{6^4}=\frac{1}{2^4}\doteq 0,0625$.

Př. 7: Urči pravděpodobnost, že během pěti hodů kostkou nehodíš ani jednou šestku.

Množina možných výsledků: uspořádané pětice ze šesti čísel $\Rightarrow$ 6^5 možností.
Počet příznivých výsledků: nesmí padnout 6 $\Rightarrow$ pětice sestavujeme jen z pěti čísel $\Rightarrow$ 5^5 možností $\Rightarrow$ pravděpodobnost: $\frac{5^5}{6^5}\doteq 0,402$.

Př. 8: Urči pravděpodobnost, že během deseti hodů kostkou hodíš alespoň jednou šestku.

Množina možných výsledků: uspořádané desetice ze šesti čísel $\Rightarrow$ 6^{10} možností.
Počet příznivých výsledků: musí padnout alespoň jednou 6 $\Rightarrow$ obrovské množství různých možností (1 šestka, 2 šestky, …) $\Rightarrow$ jednodušší bude spočítat opak, kdy nepadne ani jedna šestka a odečíst od všech výsledků.
Nepadne ani jedna šestka $\Rightarrow$ desetice sestavujeme jen z pěti čísel $\Rightarrow$ 5^{10} možností $\Rightarrow$ alespoň jednou šestka $6^{10}-5^{10}$ možností.
Pravděpodobnost: $\frac{6^{10}-5^{10}}{6^{10}}=1-\frac{5^{10}}{6^{10}}\doteq 0,838$.

Př. 9: Petáková:
strana 170/cvičení 4 a) b) d)
strana 170/cvičení 6 a) c)
strana 170/cvičení 8
strana 170/cvičení 12

Shrnutí: Není možné vyřešit příklady na výpočet pravděpodobnosti bez správného stanovení množiny všech výsledků.