9.2.5 Sčítání pravděpodobností I

Předpoklady: 9203

Pedagogická poznámka: Následující problém sice zadávám jako příklad, ale minimálně na začátku s žáky počítám na tabuli. I kvůli tomu, aby jejich úprava v sešitě odpovídala tomu, co je v učebnici.

Př. 1: Na falešné kostce padají jednotlivá čísla s následujícími pravděpodobnostmi: $P(1)=\frac{1}{12}$, $P(2)=\frac{1}{12}$, $P(3)=\frac{1}{12}$, $P(4)=\frac{2}{12}$, $P(5)=\frac{3}{12}$, $P(6)=\frac{4}{12}$. Mohou být udané hodnoty pravděpodobností správné? Urči pravděpodobnost, že padne číslo větší než tři. Urči pravděpodobnost, že padne sudé číslo. Urči pravděpodobnost, že číslo, které padne, je sudé nebo větší než 3. Použité postupy ověřuj na příkladu poctivé kostky.

Celková pravděpodobnost musí být rovna jedné: $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{12}{12}=1 \Rightarrow$ udané hodnoty mohou být správné.

K určování pravděpodobností nemůžeme používat vzorec $\frac{\textit{počet výsledků příznivých jevu}}{\textit{počet všech výsledků}}$, máme k dispozici pouze pravděpodobnosti jevů ne jednotlivé stejně pravděpodobné výsledky.

Kdy padne číslo větší než 3? Když padne buď 4, 5 nebo 6 $\Rightarrow$ zkusíme sečíst hodnoty pravděpodobností pro tyto jevy.

Falešná kostka (sčítání pravděpodobností)

Padne číslo větší než tři:

$P(A)=P(4)+P(5)+P(6)=$

$=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

Padne sudé číslo:

$P(B)=P(2)+P(4)+P(6)=$

$=\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$

Padne číslo sudé nebo větší než 3:

$P(C)=P(2)+P(4)+P(5)+P(6)=$

$=\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{10}{12}$

Poctivá kostka (vzorec $\frac{\textit{počet výsledků příznivých jevu}}{\textit{počet všech výsledků}}$)

Padne číslo větší než tři

Sčítáním:

$P(A)=P(4)+P(5)+P(6)=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

Vzorcem: $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Padne sudé číslo:

Sčítáním:

$P(B)=P(2)+P(4)+P(6)=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

Vzorcem: $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Padne číslo sudé nebo větší než 3:

Sčítáním:

$P(B)=P(2)+P(4)+P(5)+P(6)=4\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

Vzorcem: $P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

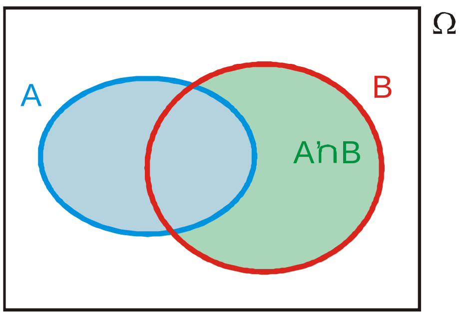
Zdá se, že pravděpodobnost jevu, který je sjednocením jiných jevů, můžeme určit sečtením pravděpodobností těchto jevů.
Problém: Jev C z předchozího příkladu je sjednocením jevů A a B $\Rightarrow$ platí sčítací vzorec i pro něj?
Falešná kostka: $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{4}+\frac{7}{12}=\frac{9}{12}+\frac{7}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ nesmysl, pravděpodobnost nemůže být více než 1.
Poctivá kostka: $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ $\Rightarrow$ nesmysl, jev „Padne číslo sudé nebo větší než 3“ není jistý jev a nemůže mít pravděpodobnost rovnou jedné.
$\Rightarrow$ Pravidlo pro sčítání nefunguje ve všech případech.
Proč?
Projdeme si pomalu postup, kterým jsme se dostali ke špatnému výsledku:
$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=P(4)+P(5)+P(6)+P(2)+P(4)+P(6)$ $\Rightarrow$ a je to jasné. Jev A i jev B obsahují hození 4 a hození 6, jejich pravděpodobnosti jsme tak započítali dvakrát.

- Prosté sčítání pravděpodobností je možné pouze u pravděpodobností jevů, které se navzájem vylučují (množiny jim příznivých výsledků mají prázdný průnik).
- Při sčítání pravděpodobností jevů, které se navzájem nevylučují, musíme od výsledku odečíst pravděpodobnost výsledků, které jsou příznivé oběma jevům.

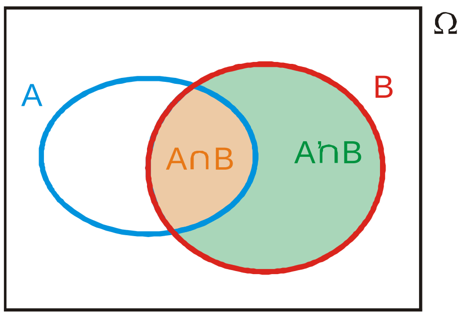
Ověříme si na obou kostkách:
Falešná kostka:
$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}+\frac{7}{12}-\left(\frac{2}{12}+\frac{4}{12}\right)=\frac{9}{12}+\frac{7}{12}-\frac{6}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$
$\Rightarrow$ stejný výsledek jako při přímém výpočtu.
Poctivá kostka: $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ opět stejný výsledek jako při přímém výpočtu.
Zdá se, že se na náš výsledek můžeme spolehnout.

Pravděpodobnost sjednocení dvou navzájem se vylučujících jevů je rovna součtu jejich pravděpodobností.
Jsou-li $A_1,\dots,A_n$ navzájem se vylučující jevy, tj. $A_i\cap A_j=0$ pro $i\neq j$ potom $P(A_1\cup\dots\cup A_n)=P(A_1)+\dots+P(A_n)$.
Pravděpodobnost sjednocení dvou navzájem se nevylučujících jevů A¸ B určíme pomocí vzorce $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Vzorec pro nevylučující se jevy A, B můžeme znázornit i graficky.



Platí: $A \cup B = A \cup (A' \cap B)$ (sjednocení dvou vylučujících se jevů) $\Rightarrow$ pravděpodobnosti:
$P(A \cup B) = P(A) + P(A' \cap B)$.



Platí: $B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$ (sjednocení dvou vylučujících se jevů) $\Rightarrow$ pravděpodobnosti:
$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$.

Z pravé rovnice vyjádříme: $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ a dosadíme do levé rovnice.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Př. 2: Sejmeme jednu kartu z balíčku mariášových karet. Urči pravděpodobnost, že sejmutá karta je: a) srdcová, b) eso, c) srdcová nebo eso.

Množina všech možných výsledků má 32 prvků (32 karet).

a) sejmutá karta je srdcová

8 srdcových karet $\Rightarrow$ 8 výsledků příznivých $\Rightarrow$ pravděpodobnost $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,25$.

b) sejmutá karta je eso

4 esa $\Rightarrow$ 4 příznivé výsledky $\Rightarrow$ pravděpodobnost $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125$.

c) sejmutá karta je srdcová nebo eso

1 srdcové eso $\Rightarrow$ 1 výsledek příznivý pro průnik jevů A a B $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = \frac{1}{32} \doteq 0,03$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32} \doteq 0,34$

Srdcovou kartu nebo eso sejmeme s pravděpodobností $\frac{11}{32}$.

Dodatek: Příklad můžeme vyřešit i přímo: v balíčku je 8 srdcových karet a 3 nesrdcová esa, tedy 11 karet, které nás zajímají $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{11}{32} \doteq 0,34$.

Př. 3: Z 28 žáků 4.1012 se losuje 7, kteří budou maturovat v pondělí. Urči pravděpodobnost, že mezi vylosovanými bude Kristýna nebo Monika.

Jev A: je vylosována Kristýna, jev B: je vylosována Monika.
Oba jevy se navzájem nevylučují $\Rightarrow$ vzorec $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Množina všech možných výsledků: vybíráme 7 z 28 žáků, na pořadí nezáleží $\Rightarrow$ kombinace bez opakování $\Rightarrow$ $\binom{28}{7}$ možností.

Počet možností příznivých jevu *A*: vybereme Kristýnu a dále vybíráme na zbývajících 6 míst ze zbývajících 27 žáků $\Rightarrow$ $\binom{27}{6}$ možností.

$P(A)=\dfrac{\binom{27}{6}}{\binom{28}{7}}=\dfrac{1}{4}=P(B)$ (situace je u obou dívek stejná).

Určujeme pravděpodobnost jevu $P(A\cap B)$ (vylosovány jsou Kristýna i Monika): vybereme do skupiny Kristýnu i Moniku $\Rightarrow$ vybíráme 5 žáků ze zbývajících 26 $\Rightarrow$ $\binom{26}{5}$ možností $\Rightarrow$

pravděpodobnost: $P(A\cap B)=\dfrac{\binom{26}{5}}{\binom{28}{7}}=\dfrac{1}{18}$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{18}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}.$$

Dodatek: Výsledek bychom opět mohli snadno získat přímým výpočtem:

$$P(A\cup B)=\frac{2\cdot\binom{27}{6}-\binom{26}{5}}{\binom{28}{7}}=\frac{4}{9}.$$

Př. 4: 3 vstupenky na koncert se ve 4.1011 losem rozdělují mezi 9 zájemců. Urči, jaká je pravděpodobnost, že mezi vylosovanými budou
a) Lenka a Vendula nebo Martin a Vojtěch;
b) Lenka a Vendula nebo Lenka a Silvie.

Množina všech možných výsledků: vybíráme 3 z 9 zájemců, na pořadí nezáleží $\Rightarrow$ kombinace bez opakování $\Rightarrow$ $\binom{9}{3}$ možností.

a) Lenka a Vendula nebo Martin a Vojtěch;
Určujeme pravděpodobnost sjednocení dvou jevů.
Jev *A*: mezi vylosovanými jsou Lenka a Vendula $\Rightarrow$ vybíráme pouze posledního držitele vstupenky ze zbývajících 7 zájemců $\Rightarrow$ 7 možností $P(A)=\dfrac{7}{\binom{9}{3}}=\dfrac{1}{12}$

Jev *B*: mezi vylosovanými jsou Martin a Vojtěch $\Rightarrow$ $P(B)=P(A)=\dfrac{1}{12}$ (stejné důvody).

Jev $A \cap B$ nastat nemůže (museli bychom rozdělit 4 vstupenky, ale máme pouze 3) $\Rightarrow$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

b) Lenka a Vendula nebo Lenka a Silvie.

Jev *A*: mezi vylosovanými jsou Lenka a Vendula $\Rightarrow$ $P(A) = \frac{7}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{12}$

Jev *B*: mezi vylosovanými jsou Lenka a Silvie $\Rightarrow$ $P(B) = \frac{7}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{12}$ (stejné důvody).

Jev $A \cap B$ nastane pouze v případě, že lístky dostanou právě Lenka, Vendula a Silvie $\Rightarrow$
$P(A \cap B) = \frac{1}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{84}$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{84} = \frac{13}{84}$$

Př. 5: Provedeme jeden hod s modrou a červenou kostkou. Urči pravděpodobnost jevů.
a) Jev A „na modré kostce padne číslo větší než 3“.
b) Jev B „na červené kostce padne sudé číslo“.
c) Jev C „na modré kostce padne číslo větší než 3 a na červené padne sudé číslo“.
d) Jev D „na modré kostce padne číslo větší než 3 nebo na červené padne sudé číslo“.
V bodě d) využij pravidlo pro sčítání pravděpodobností.

Házíme dvě rozlišitelné kostky $\Rightarrow$ množinou všech možných výsledků jsou uspořádané dvojice sestavené z čísel 1 až 6.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\ (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\ (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\ (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\ (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\ (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6) \end{Bmatrix} \Rightarrow 6^2 = 36 \text{ možností.}$$

a) Jev A „na modré kostce padne číslo větší než 3“.

18 příznivých výsledků (spodní tři řádky) $\Rightarrow$ $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

b) Jev B „na červené kostce padne sudé číslo“.

18 příznivých výsledků (2, 4 a 6 sloupec) $\Rightarrow$ $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

c) Jev C „na modré kostce padne číslo větší než 3 a na červené padne sudé číslo“.

9 příznivých výsledků (spodní tři čísla ve 2, 4 a 6 sloupci) $\Rightarrow$ $P(A\cap B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

d) Jev D „na modré kostce padne číslo větší než 3 nebo na červené padne sudé číslo“.
Pomocí vzorce pro sčítání pravděpodobností:
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.
Přímo: 27 příznivých výsledků (spodní tři řádky a horní tři čísla ve 2, 4 a 6 sloupci) $\Rightarrow$
$P(A\cup B)=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$.

Př. 6: 6 vstupenek na koncert se losem rozděluje mezi 10 zájemců. Mezi zájemci je jedna partnerská dvojice a jedna trojice kamarádů. Obě tyto skupiny by chtěly koncert navštívit společně. Urči pravděpodobnost, že alespoň jedna skupina bude mít štěstí a půjde na koncert společně.

Všechny možné výsledky: vybíráme 6 lidí z 10, na pořadí nezáleží $\Rightarrow$ $\binom{10}{6}$ možností.
Jev *A*: Mezi vylosovanými bude partnerská dvojice $\Rightarrow$ příznivým výsledkům odpovídají šestice, které obsahují první dvojici $\Rightarrow$ vybíráme čtyři ze zbývajících osmi zájemců $\Rightarrow$ $\binom{8}{4}$ možností.
Jev *B*: Mezi vylosovanými bude trojice kamarádů $\Rightarrow$ příznivým výsledkům odpovídají šestice, které obsahují tuto trojici $\Rightarrow$ vybíráme tři ze zbývajících sedmi zájemců $\Rightarrow$ $\binom{7}{3}$ možností.
Jev $A\cap B$: Mezi vylosovanými je partnerská dvojice i trojice kamarádů $\Rightarrow$ příznivým výsledkům odpovídají šestice, které obsahují těchto pět lidí $\Rightarrow$ ze zbývajících pěti zájemců vybíráme jednoho $\Rightarrow$ $\binom{5}{1}$ možností.

$P(A)=\frac{\binom{8}{4}}{\binom{10}{6}}=\frac{1}{3}$ $\qquad P(B)=\frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{6}}=\frac{1}{6}$ $\qquad P(A\cap B)=\frac{\binom{5}{1}}{\binom{10}{6}}=\frac{1}{42}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{42}=\frac{10}{21}\doteq 0,48$
Alespoň jedna skupina bude mít štěstí a půjde na koncert společně s pravděpodobností 0,48.

Shrnutí: Jednoduše sčítat můžeme pouze pravděpodobnosti navzájem se vylučujících dějů (jinak musíme odečíst průnik).