9.2.6 Sčítání pravděpodobností II

Předpoklady: 9205

Př. 1: Urči pravděpodobnost, že při pěti hodech mincí hodíš alespoň jednou líc.

Množina všech možných výsledků: uspořádaná pětice typu (r,l,l,r,r) (jako bychom mince odlišovali od sebe) $\Rightarrow$ počet všech možných výsledků: $2^5 = 32$.
Počet výsledků příznivých jevu hodíme alespoň jeden líc: obtížné a zdlouhavé, můžeme líc hodit právě jednou, právě dvakrát,….
Trik už z kombinatoriky: Nejde spočítat to, co chceme $\Rightarrow$ spočteme možnosti, které nechceme, a odečteme je od všech možností.
Nepadne ani jednou líc $\Rightarrow$ pokaždé padne rub $\Rightarrow$ jediná možnosti $\Rightarrow$ počet možností, kdy padne alespoň jeden líc: $32-1=31$.
Pravděpodobnost, že při pěti hodech hodíme alespoň jednou líc je $\frac{31}{32}$.

I předchozí postup můžeme přepsat pomocí sčítání pravděpodobností.
Máme jev A a jeho opačný jev A' $\Rightarrow$ platí:

- $A \cap A' = \emptyset$ (oba jevy se navzájem vylučují),
- $A \cup A' = \Omega$ (sjednocením získáme množinu všech výsledků).

Pro pravděpodobnosti pak platí: $P(A \cup A') = P(\Omega) = 1$

$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A')$.

Pravděpodobnost jevu můžeme určit tím, že od jedničky odečteme pravděpodobnost jevu opačného.

Př. 2: Urči pravděpodobnost, že v tahu sportky bude vylosováno alespoň jedno číslo větší než 40.

Počet všech možných výsledků: $\binom{49}{6}$ (táhneme 6 čísel ze 49 bez opakování, nezáleží na pořadí).
Počet příznivých výsledků: komplikovaná situace (číslo větší než 40 může být jedno, nebo i šest) $\Rightarrow$ využijeme vzorec s pravděpodobností opačného jevu.
Počet výsledků příznivých opačnému jevu (nepadne ani jedno číslo větší než 40): $\binom{40}{6}$ (táhneme 6 čísel ze 40 zbývajících bez opakování, nezáleží na pořadí).

$$P(A') = \frac{\binom{40}{6}}{\binom{49}{6}} \doteq 0,27 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0,27 = 0,73$$

Alespoň jedno číslo větší než 40 je v tahu sportky vylosováno s pravděpodobností 0,73.

Př. 3: Urči pravděpodobnost, že při deseti hodech kostkou hodíš alespoň dvakrát šestku.

Počet všech možných výsledků: 6^{10} (rozlišujeme hody mezi sebou, v každém může padnout jedno ze šesti čísel).
Počet příznivých výsledků: komplikovaná situace (šestku můžeme hodit dvakrát, třikrát, …) $\Rightarrow$ využijeme vzorec s pravděpodobností opačného jevu.
Počet výsledků příznivých opačnému jevu (šestku hodíme maximálně jednou):

- šestka ani jednou: 5^{10} (v každém tahu může padnout jedno ze zbývajících pěti čísel),
- šestka právě jednou: $\binom{10}{1}\cdot 5^9$ (vybereme, v kterém hodu padne šestka, v ostatních může padnou jedno ze zbývajících pěti čísel).

$$P(A') = \frac{5^{10} + 10\cdot 5^9}{6^{10}} \doteq 0,48 \;\Rightarrow\; P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0,48 \doteq 0,52$$

Při deseti hodech kostkou hodíme alespoň dvakrát šestku s pravděpodobností 0,52.

Pedagogická poznámka: Žáci mají tendenci zapomínat na možnosti, které přinášejí ostatní čísla, která nás nezajímají. Často se pak objevuje jako počet možností, kdy šestka padne právě jednou výraz $\binom{10}{1}$. Zde stačí připomenout, aby si tento výsledek srovnali s výsledkem pro „šestka ani jednou“.

Př. 4: Do 4.2011 chodí 28 studentů. Urči pravděpodobnost, že alespoň dva z nich mají narozeniny ve stejný den. Předpokládej, že rok má 365 dní a děti se v jeho průběhu rodí rovnoměrně.

Počet všech možných výsledků: Každý student se může narodit v libovolném dni v roce $\Rightarrow$ po každého máme 365 možností $\Rightarrow$ 365^{28} možností.
Počet příznivých výsledků: komplikovaná situace (v jeden den se mohou narodit dva, tři studenti, …) $\Rightarrow$ využijeme vzorec s pravděpodobností opačného jevu.
Počet výsledků příznivých opačnému jevu (žádní dva se nenarodí ve stejný den):
$365\cdot 364\cdot ...\cdot(365-28+1) = \frac{365!}{(365-28)!}$ (první student se může narodit kdykoliv, druhý jen v jiný den, třetí jen v jiný den než oba předchozí, …).

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{365!}{365^{28}\cdot(365-28)!} \doteq 0,65$$

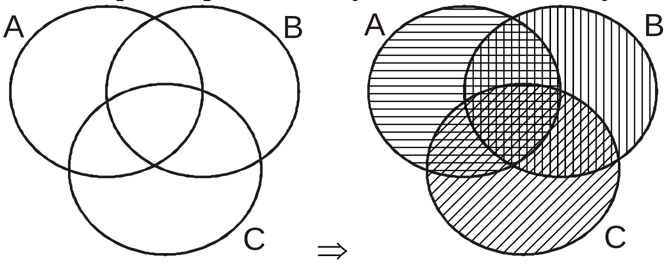
Alespoň dva žáci 4.2011 mají narozeniny ve stejný den s pravděpodobností 0,65.

Dodatek: Vztah můžeme sestavit i obecně pro *k* lidí: $P(A) = 1 - \frac{365!}{365^k\cdot(365-k)!}$.

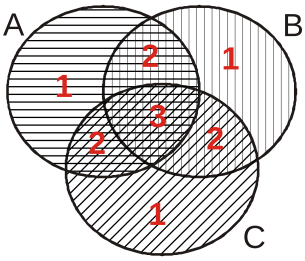
Pravděpodobnosti, že dva lidé mají narozeniny ve stejný den, vycházejí daleko vyšší než je obecně očekáváno, například u pro 23 lidí vychází pravděpodobnost 51%, pro 41 už přes 90% a pro 57 lidí přes 99%.

Př. 5: Pokus se vzorec pro sčítání pravděpodobností $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ rozšířit na sjednocení tří množin *A*, *B*, *C*.

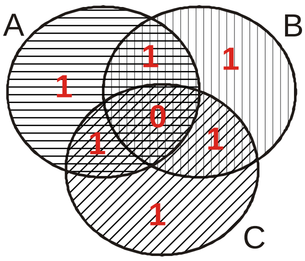
Pomůžeme si množinovým obrázkem.
Sečteme pravděpodobnosti jevů *A*, *B*, *C* a šrafujeme si je v grafu.



Do každé oblast si zapíšeme kolikrát byla započtena.
$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$



Odečteme průniky dvou množin $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, které jsme v předchozím kroku započítali dvakrát.
$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)$



Průnik všech tří množin $A\cap B\cap C$ by nebyl vůbec započítán $\Rightarrow$ musíme ho přičíst.
$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

Pedagogická poznámka: Po chvilce je potřeba nakreslit minimálně první obrázek na tabuli a poradit třídě, aby na svých obrázcích sledovala, kolikrát kterou část započítá.

Př. 6: Z 28 žáků 4.4011 se losuje 7 studentů, kteří budou maturovat v pondělí. Urči pravděpodobnost, že mezi vylosovanými bude Hanka nebo Hanka nebo Hanka (do třídy chodí celkem tři Hanky: Hanka F., Hanka K., Hanka S.).

Jednotlivé Hanky označíme prvním písmenem příjmení (F, K, S).
Množina všech možných výsledků: $\binom{28}{7}$ možností (vybíráme 7 studentů z 28, bez opakování na pořadí nezáleží).
Základní jevy:

- jev F „mezi vylosovanými bude Hanka F.“: počet příznivých výsledků $\binom{27}{6}$ (ze zbývajících 27 žáků vybíráme 6, Hanka F. Je vybrána) $\Rightarrow$ $P(F)=\dfrac{\binom{27}{6}}{\binom{28}{7}}=\dfrac{1}{4}$,
- jev K „mezi vylosovanými bude Hanka K.“: stejně jako u jevu F $\Rightarrow$ $P(K)=\dfrac{1}{4}$,
- jev S „mezi vylosovanými bude Hanka S.“: stejně jako u jevu F $\Rightarrow$ $P(S)=\dfrac{1}{4}$.

Průniky:

- jev $F\cap K$ (vylosovány Hanka F. i K.): počet příznivých výsledků $\binom{26}{5}$ (ze zbývajících 26 žáků vybíráme 5, Hanky F. a K. vybrány) $\Rightarrow$ $P(F\cap K)=\dfrac{\binom{26}{5}}{\binom{28}{7}}=\dfrac{1}{18}$,
- jev $F\cap S$ (vylosovány Hanka F. i S.): stejné jako $F\cap K$ $\Rightarrow$ $P(F\cap S)=\dfrac{1}{18}$,
- jev $K\cap S$ (vylosovány Hanka K. i S.): stejné jako $F\cap K$ $\Rightarrow$ $P(K\cap S)=\dfrac{1}{18}$,
- jev $F\cap K\cap S$ (vylosovány Hanka F., K. i S.): příznivých výsledků $\binom{25}{4}$ (z 25 žáků vybíráme 4, všechny Hanky vybrány) $\Rightarrow$ $P(F\cap K\cap S)=\dfrac{\binom{25}{4}}{\binom{28}{7}}=\dfrac{5}{468}$.

Dosazení do vzorce pro součet pravděpodobností:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{18}-\frac{1}{18}-\frac{1}{18}+\frac{5}{468}=\frac{139}{234}\doteq 0,59$$

Pravděpodobnost, že k pondělní maturitě bude vylosována alespoň jedna Hanka je 0,59.

Pedagogická poznámka: Na první pohled jsou jména zvolena špatně, ale na druhý, když si představíte, že budete pořád říkat Hanka nebo Hanka nebo Hanka….

Pedagogická poznámka: Logicky by mělo být pořadí příklad 6 a 7 obrácené, ale pak by se na šestý příklad nedostalo a to by byla větší škoda než když většina třídy nestihne příklad sedm.

Př. 7: Urči pomocí vzorce pro sčítání pravděpodobností i přímým výpočtem pravděpodobnost jevu: Na kostce padne číslo menší než 5 nebo liché číslo nebo prvočíslo.

Množina všech možných výsledků: 6 možností (čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6).
Základní jevy:

- jev A „na kostce padne číslo menší než 5“: počet příznivých výsledků 4 (čísla 1, 2, 3, 4),
- jev B „na kostce padne liché číslo“: počet příznivých výsledků 3 (čísla 1, 3, 5),
- jev C „na kostce padne prvočíslo“: počet příznivých výsledků 3 (čísla 2, 3, 5).

Průniky:

- jev $A \cap B$ (číslo liché a menší než 5): počet příznivých výsledků 2 (čísla 1, 3),
- jev $A \cap C$ (prvočíslo menší než 5): počet příznivých výsledků 2 (čísla 2, 3),
- jev $B \cap C$ (liché prvočíslo): počet příznivých výsledků 2 (čísla 3, 5),
- jev $A \cap B \cap C$ (liché prvočíslo menší než 5): počet příznivých výsledků 1 (číslo 3),

Výsledek: jev $A \cup B \cup C$ (prvočíslo nebo liché číslo nebo číslo menší než 5): počet příznivých výsledků 5 (čísla 1, 2, 3, 4, 5) $\Rightarrow$ $P(A \cup B \cup C) = \frac{5}{6}$.

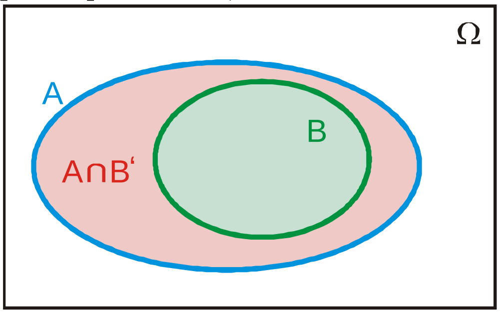
Dosazení do vzorce pro součet pravděpodobností:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$

$$\frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} - \frac{2}{6} - \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Získali jsme stejný výsledek přímým výpočtem i pomocí vzorce pro sčítání pravděpodobností.

Pomocí obrázků můžeme snadno odvodit i další pravidla pro sčítání (odčítání pravděpodobností).



Například v situaci na obrázku platí:
B je podjevem jevu A ($B \subset A$) $\Rightarrow$ $A = B \cup (A \cap B')$
$\Rightarrow$ pro pravděpodobnosti:
$P(A) = P(B) + P(A \cap B')$
Je-li $B \subset A$, potom $P(A \cap B') = P(A) - P(B)$.
Důsledek: Je-li $B \subset A$, potom $P(B) \le P(A)$.

Shrnutí: Pravděpodobnost jevu můžeme určit tím, že od jedničky odečteme pravděpodobnost jevu opačného.