

9.2.7 Nezávislé jevy I

Předpoklady: 9204

Př. 1: Předpokládej, že pravděpodobnost narození chlapce je stejná jako pravděpodobnost narození dívky (a tedy v obou případech rovna 0,5) a není ovlivněna genetickými dispozicemi rodičů. Najdi množinu všech možných výsledků rození dětí v rodinách se třemi dětmi. Urči pravděpodobnosti následujících jevů:

- a) Jev A : „nejstarší dítě je hoch“ b) Jev B : „prostřední dítě je dívka“
c) Jev C : „všechny tři děti jsou hoši“

Urči také pravděpodobnosti jevů $(A \cap B)$, $(A \cap C)$ a $(B \cap C)$. U každého průniku rozhodni, zda je v běžném smyslu možné považovat jevy, ze kterých je sestaven, za nezávislé.

Při sestavování množiny všech výsledků musíme zohlednit:

- potřebujeme znát pořadí dětí, kvůli určení pravděpodobností jevů A a B ,
- všechny výsledky by měly být stejně pravděpodobné (což neplatí pro výsledky „dvě dívky a jeden hoch“ a „tři hoši“),

\Rightarrow množinou všech výsledků budou uspořádané trojice z písmen h, d , kde první místo znamená pohlaví prvního dítěte, druhé místo pohlaví druhého, třetí místo třetího.

$$\Omega = \{(h, h, h), (h, h, d), (h, d, h), (d, h, h), (h, d, d), (d, h, d), (d, d, h), (d, d, d)\}$$

a) Jev A : „nejstarší dítě je hoch“

$$A = \{(h, h, h), (h, h, d), (h, d, h), (h, d, d)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

b) Jev B : „prostřední dítě je dívka“

$$B = \{(h, d, h), (h, d, d), (d, d, h), (d, d, d)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

c) Jev C : „všechny tři děti jsou hoši“

$$C = \{(h, h, h)\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{8}$$

Nezávislé jevy: jevy, které se neovlivňují.

Jev $(A \cap B)$: „první dítě je hoch a prostřední je dívka“

$$A \cap B = \{(h, d, h), (h, d, d)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Jevy A, B jsou nezávislé, skutečnost, že se jako první narodí chlapec, nemá vliv na pohlaví druhého dítěte.

Jev $(A \cap C)$: „první dítě je hoch a všechny tři děti jsou hoši“

$$A \cap C = \{(h, h, h)\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{8}$$

Jevy A, C nejsou nezávislé, protože se nemohou narodit tři hoši bez toho, aby první dítě byl hoch.

Jev $(B \cap C)$: „prostřední dítě je dívka a všechny tři děti jsou hoši“

$$B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{0}{8} = 0$$

Jevy B, C nejsou nezávislé, protože když bude prostřední dítě dívka, nikdy se nenarodí ze tří dětí tři hoši.

Pravděpodobnost, že „první dítě je hoch a druhé dítě je dívka“ můžeme určit i jinak. Přibližně polovina rodin má jako první dítě hoch a z této poloviny pak polovina rodin má jako druhé dítě dívku \Rightarrow pravděpodobnost jevu $(A \cap B)$ je tedy: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Rozebereme si význam jednotlivých členů: $\frac{1}{2} = P(A)$, $\frac{1}{2} = P(B)$, $\frac{1}{4} = P(A \cap B)$.

Zdá se, že platí vzorec: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Platí tento vzorec i pro jevy A, C ? $P(A \cap C) = \frac{1}{8} \neq P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

Podobně vzorec neplatí pro jevy B, C : $P(B \cap C) = 0 \neq P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

Závěr: Zdá se, že pokud jsou dva jevy A, B nezávislé, pravděpodobnost $P(A \cap B)$ toho, že nastanou oba, získáme jako součin pravděpodobností $P(A)$ a $P(B)$.

Ve skutečnosti je to ještě jinak. „Nemít vliv“ není matematický termín a tak nemůžeme tímto způsobem rozhodovat, zda jsou dva jevy nezávislé. Rozhodnutí je pak možné učinit pouze na základě toho, zda vzorec $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ platí nebo ne. \Rightarrow Nejenže pro nezávislé jevy můžeme používat vzorec $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ale dokonce platnost tohoto vzorce rozhoduje o tom, zda jevy můžeme považovat za nezávislé.

Řekneme, že jevy A, B jsou nezávislé, jestliže platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Př. 2: Ve třetím ročníku gymnázia propadá ve čtvrtletí v průměru 5% studentů z matematiky, 2% studentů z fyziky a 1% studentů z obou předmětů. Rozhodni, zda jsou jevy „student propadne z matematiky“ a „student propadne z fyziky“ nezávislé.

Uvedená procenta vyjádříme jako pravděpodobnosti: $P(M) = 0,05$, $P(F) = 0,02$,

$P(M \cap F) = 0,01$.

Dosadíme do vzorce: $P(M \cap F) = P(M) \cdot P(F)$.

$0,01 \neq 0,05 \cdot 0,02 = 0,001$

Jevy „student propadne z matematiky“ a „student propadne z fyziky“ jsou závislé (což není nic překvapivého).

Př. 3: U náhodného pokusu z prvního příkladu rozhodni nejdříve odhadem, poté dosazením do vzorce, zda jsou nezávislé dvojice jevů:

a) D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, E : „třetí se narodí hoch“,

b) D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, F : „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“,

c) D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, G : „pohlaví všech tří dětí je stejné“.

Určíme potřebné pravděpodobnosti a dosadíme do vzorce.

a) D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, E : „třetí se narodí hoch“

Jevy D a E jsou zřejmě nezávislé.

Jev D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“ .

$$D = \{(h, h, h), (h, h, d), (d, d, h), (d, d, d)\} \Rightarrow P(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Jev E : „třetí se narodí hoch“.

$$E = \{(h, h, h), (h, d, h), (d, h, h), (d, d, h)\} \Rightarrow P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Jev $D \cap E$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a třetí se narodí hoch“.

$$D \cap E = \{(h, h, h), (d, d, h)\} \Rightarrow P(D \cap E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Vzorec: $P(D \cap E) = P(D) \cdot P(E) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ jevy D a E jsou nezávislé.

b) D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, F : „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“

Jevy D a F by mohly být nezávislé.

Jev F : „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“.

$$F = \{(h, h, h), (h, d, h), (d, h, d), (d, d, d)\} \Rightarrow P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Jev $D \cap F$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“.

$$D \cap F = \{(h, h, h), (d, d, d)\} \Rightarrow P(D \cap F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Vzorec: $P(D \cap F) = P(D) \cdot P(F) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ jevy D a F jsou nezávislé.

c) D : „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, G : „pohlaví všech tří dětí je stejné“

Jevy jsou závislé, pokud není pohlaví prvních dvou dětí stejné, nemohou mít stejné pohlaví všechny tři děti.

Jev G : „pohlaví všech tří dětí je stejné“.

$$G = \{(h, h, h), (d, d, d)\} \Rightarrow P(G) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Jev $D \cap G$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a pohlaví všech tří dětí je stejné“.

$$D \cap G = \{(h, h, h), (d, d, d)\} \Rightarrow P(D \cap G) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Vzorec: $P(D \cap G) = P(D) \cdot P(G) \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow$ jevy D a G nejsou nezávislé.

Pedagogická poznámka: Žáci sice mají napsanou podmínku pro nezávislé jevy, spočítaný příklad, ale přesto mají tendenci v předchozím příkladu nic neověřovat, spočítat pravděpodobnost průniku součinem a prohlásit jevy za nezávislé.

Dodatek: Podobně jako můžeme určit, zda jsou nezávislé jevy A , B pomocí vzorce $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, můžeme rozhodnout i o nezávislosti tří jevů A , B , C .

Jevy A , B , C jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé:

a) každé dva z nich (\Rightarrow platí vzorce $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ a $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$),

b) všechny tři jevy dohromady (\Rightarrow platí vzorec

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Analogicky je možné určovat nezávislost více jevů než tří.

Př. 4: Házíme modrou a bílou kostkou. Číslo, které padne na modré kostce, značíme m , číslo na bílé kostce b . Rozhodni, zda jsou nezávislé jevy:

- a) jev $A: m+b=7$ a jev $B: m=3$, b) jev $C: m+b=9$ a jev $D: m=4$,
 c) jev $C: m+b=9$ a jev $E: m>3$, d) jev $F: m+b=11$ a jev $G: m \neq 5$.

Při hodu rozlišujeme barvy kostek \Rightarrow množinou všech možných výsledků bude množina všech uspořádaných dvojic čísel 1 až 6.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\ (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\ (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\ (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\ (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\ (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6) \end{array} \right\}$$

a) jev $A: m+b=7$ a jev $B: m=3$

$P(A)$: možnosti, jak získat součet 7: $7=4+3 \Rightarrow 2$ možnosti, $7=5+2 \Rightarrow 2$ možnosti,

$$7=6+1 \Rightarrow 2 \text{ možnosti} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$P(B)$: možnosti, kde $m=3$: celý třetí řádek tabulky $\Rightarrow 6$ možností $\Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$P(A \cap B)$: možnosti, jak získat součet 7 a $m=3$: jediná možnost $(3;4)$.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \Rightarrow \text{jevy } A: m+b=7 \text{ a } B: m=3 \text{ jsou nezávislé.}$$

b) jev $C: m+b=9$ a jev $D: m=4$

Zdánlivě stejný příklad jako v předchozím bodě.

$P(C)$: možnosti, jak získat součet 9: $9=4+5 \Rightarrow 2$ možnosti, $9=6+3 \Rightarrow 2$ možnosti \Rightarrow

$$P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

$P(D)$: možnosti, kde $m=4$: celý čtvrtý řádek tabulky $\Rightarrow 6$ možností $\Rightarrow P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$P(C \cap D)$: možnosti, jak získat součet 9 a $m=4$: jediná možnost $(4;5) \Rightarrow$

$$P(C \cap D) = \frac{1}{36}.$$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(C) \cdot P(D) = P(C \cap D)$.

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54} \neq \frac{1}{36} \Rightarrow \text{jevy } C: m+b=9 \text{ a } D: m=4 \text{ nejsou nezávislé} \Rightarrow \text{někdy je doopravdy}$$

těžké dopředu odhadnout, zda jsou jevy závislé či ne.

c) jev C : $m+b=9$ a jev E : $m>3$

$P(E)$: možnosti, kde $m>3$: celý čtvrtý, pátý a šestý řádek tabulky \Rightarrow 18 možností \Rightarrow

$$P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

$P(C \cap E)$: možnosti, jak získat součet 9 a $m>3$: tři možnosti $(4;5)$, $(5;4)$, $(6;3)$ \Rightarrow

$$P(C \cap E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(C) \cdot P(E) = P(C \cap E)$.

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \neq \frac{1}{12} \Rightarrow \text{jevy } C: m+b=9 \text{ a } E: m>3 \text{ nejsou nezávislé.}$$

d) jev F : $m+b=11$ a jev G : $m \neq 5$

$P(F)$: možnosti, jak získat součet 11: $11=6+5 \Rightarrow$ 2 možnosti $\Rightarrow P(F) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

$P(G)$: možnosti, kde $m \neq 5$: všechny řádky tabulky kromě pátého \Rightarrow 30 možností \Rightarrow

$$P(G) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

$P(F \cap G)$: možnosti, jak získat součet 11 a $m \neq 5$: jediná možnost $(6;5)$ \Rightarrow

$$P(F \cap G) = \frac{1}{36}.$$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(F) \cdot P(G) = P(F \cap G)$.

$$\frac{1}{18} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{108} \neq \frac{1}{36} \Rightarrow \text{jevy } F: m+b=11 \text{ a } G: m \neq 5 \text{ nejsou nezávislé.}$$

Př. 5: Petáková:

strana 172/cvičení 32

strana 172/cvičení 34

Shrnutí: Dva jevy jsou nezávislé právě tehdy, když pravděpodobnost toho, že nastanou oba najednou, se rovná součinu pravděpodobností, že nastane každý z nich.