9.2.7 Nezávislé jevy I

Předpoklady: 9204

Př. 1: Předpokládej, že pravděpodobnost narození chlapce je stejná jako pravděpodobnost narození dívky (a tedy v obou případech rovna 0,5) a není ovlivněna genetickými dispozicemi rodičů. Najdi množinu všech možných výsledků rození dětí v rodinách se třemi dětmi. Urči pravděpodobnosti následujících jevů:
a) Jev *A*: „nejstarší dítě je hoch“ b) Jev *B*: „prostřední dítě je dívka“
c) Jev *C*: „všechny tři děti jsou hoši“
Urči také pravděpodobnosti jevů $(A \cap B)$, $(A \cap C)$ a $(B \cap C)$. U každého průniku rozhodni, zda je v běžném smyslu možné považovat jevy, ze kterých je sestaven, za nezávislé.

Při sestavování množiny všech výsledků musíme zohlednit:

- potřebujeme znát pořadí dětí, kvůli určení pravděpodobností jevů *A* a *B*,
- všechny výsledku by měly být stejně pravděpodobné (což neplatí pro výsledky „dvě dívky a jeden hoch“ a „tři hoši“),

$\Rightarrow$ množinou všech výsledků budou uspořádané trojice z písmen *h*, *d*, kde první místo znamená pohlaví prvního dítěte, druhé místo pohlaví druhého, třetí místo třetího.

$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,d),(h,d,h),(d,h,h),(h,d,d),(d,h,d),(d,d,h),(d,d,d)\}$

a) Jev *A*: „nejstarší dítě je hoch“

$A = \{(h,h,h),(h,h,d),(h,d,h),(h,d,d)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

b) Jev *B*: „prostřední dítě je dívka“

$B = \{(h,d,h),(h,d,d),(d,d,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c) Jev *C*: „všechny tři děti jsou hoši“

$C = \{(h,h,h)\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{8}$

Nezávislé jevy: jevy, které se neovlivňují.

Jev $(A \cap B)$: „první dítě je hoch a prostřední je dívka“

$A \cap B = \{(h,d,h),(h,d,d)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Jevy *A*, *B* jsou nezávislé, skutečnost, že se jako první narodí chlapec, nemá vliv na pohlaví druhého dítěte.

Jev $(A \cap C)$: „první dítě je hoch a všechny tři děti jsou hoši“

$A \cap C = \{(h,h,h)\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{8}$

Jevy *A*, *C* nejsou nezávislé, protože se nemohou narodit tři hoši bez toho, aby první dítě byl hoch.

Jev $(B \cap C)$: „prostřední dítě je dívka a všechny tři děti jsou hoši“

$B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{0}{8} = 0$

Jevy *B*, *C* nejsou nezávislé, protože když bude prostřední dítě dívka, nikdy se nenarodí ze tří dětí tři hoši.

Pravděpodobnost, že „první dítě je hoch a druhé dítě je dívka“ můžeme určit i jinak. Přibližně polovina rodin má jako první dítě hocha a z této poloviny pak polovina rodin má jako druhé dítě dívku $\Rightarrow$ pravděpodobnost jevu $(A \cap B)$ je tedy: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Rozebereme si význam jednotlivých členů: $\frac{1}{2} = P(A)$, $\frac{1}{2} = P(B)$, $\frac{1}{4} = P(A \cap B)$.

Zdá se, že platí vzorec: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Platí tento vzorec i pro jevy *A*, *C*? $P(A \cap C) = \frac{1}{8} \neq P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

Podobně vzorec neplatí pro jevy *B*, *C*: $P(B \cap C) = 0 \neq P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

Závěr: Zdá se, že pokud jsou dva jevy *A*, *B* nezávislé, pravděpodobnost $P(A \cap B)$ toho, že nastanou oba, získáme jako součin pravděpodobností $P(A)$ a $P(B)$.

Ve skutečnosti je to ještě jinak. „Nemít vliv“ není matematický termín a tak nemůžeme tímto způsobem rozhodovat, zda jsou dva jevy nezávislé. Rozhodnutí je pak možné učinit pouze na základě toho, zda vzorec $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ platí nebo ne. $\Rightarrow$ Nejenže pro nezávislé jevy můžeme používat vzorec $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ale dokonce platnost tohoto vzorce rozhoduje o tom, zda jevy můžeme považovat nezávislé.

Řekneme, že jevy *A*, *B* jsou nezávislé, jestliže platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Př. 2: Ve třetím ročníku gymnázia propadá ve čtvrtletí průměru 5% studentů z matematiky, 2% studentů z fyziky a 1% studentů z obou předmětů. Rozhodni, zda jsou jevy „student propadne z matematiky“ a „student propadne z fyziky“ nezávislé.

Uvedená procenta vyjádříme jako pravděpodobnosti: $P(M) = 0,05$, $P(F) = 0,02$, $P(M \cap F) = 0,01$.

Dosadíme do vzorce: $P(M \cap F) = P(M) \cdot P(F)$.

$0,01 \neq 0,05 \cdot 0,02 = 0,001$

Jevy „student propadne z matematiky“ a „student propadne z fyziky“ jsou závislé (což není nic překvapivého).

Př. 3: U náhodného pokusu z prvního příkladu rozhodni nejdříve odhadem, poté dosazením do vzorce, zda jsou nezávislé dvojice jevů:
a) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, *E*: „třetí se narodí hoch“,
b) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, *F*: „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“,
c) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, *G*: „pohlaví všech tří dětí je stejné“.

Určíme potřebné pravděpodobnosti a dosadíme do vzorce.

a) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, *E*: „třetí se narodí hoch“
Jevy *D* a *E* jsou zřejmě nezávislé.
Jev *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“ .

$D = \{(h,h,h),(h,h,d),(d,d,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Jev *E*: „třetí se narodí hoch“.

$E = \{(h,h,h),(h,d,h),(d,h,h),(d,d,h)\} \Rightarrow P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Jev $D \cap E$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a třetí se narodí hoch“.

$D \cap E = \{(h,h,h),(d,d,h)\} \Rightarrow P(D \cap E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Vzorec: $P(D \cap E) = P(D) \cdot P(E) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ jevy *D* a *E* jsou nezávislé.

b) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, *F*: „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“
Jevy *D* a *F* by mohly být nezávislé.
Jev *F*: „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“.

$F = \{(h,h,h),(h,d,h),(d,h,d),(d,d,d)\} \Rightarrow P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Jev $D \cap F$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“.

$D \cap F = \{(h,h,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(D \cap F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Vzorec: $P(D \cap F) = P(D) \cdot P(F) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ jevy *D* a *F* jsou nezávislé.

c) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, *G*: „pohlaví všech tří dětí je stejné“
Jevy jsou závislé, pokud není pohlaví prvních dvou dětí stejné, nemohou mít stejné pohlaví všechny tři děti.
Jev *G*: „pohlaví všech tří dětí je stejné“.

$G = \{(h,h,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(G) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Jev $D \cap G$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a pohlaví všech tří dětí je stejné“.

$D \cap G = \{(h,h,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(D \cap G) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Vzorec: $P(D \cap G) = P(D) \cdot P(G) \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow$ jevy *D* a *G* nejsou nezávislé.

Pedagogická poznámka: Žáci sice mají napsanou podmínku pro nezávislé jevy, spočítaný příklad, ale přesto mají tendenci v předchozím příkladu nic neověřovat, spočítat pravděpodobnost průniku součinem a prohlásit jevy za nezávislé.

Dodatek: Podobně jako můžeme určit, zda jsou nezávislé jevy *A*, *B* pomocí vzorce $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, můžeme rozhodnout i o nezávislosti tří jevů *A*, *B*, *C*.
Jevy *A*, *B*, *C* jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé:
a) každé dva z nich ($\Rightarrow$ platí vzorce $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ a $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$),
b) všechny tři jevy dohromady ($\Rightarrow$ platí vzorec

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$).
Analogicky je možné určovat nezávislost více jevů než tří.

Př. 4: Házíme modrou a bílou kostkou. Číslo, které padne na modré kostce, značíme *m*, číslo na bílé kostce *b*. Rozhodni, zda jsou nezávislé jevy:
a) jev *A*: $m + b = 7$ a jev *B*: $m = 3$, b) jev *C*: $m + b = 9$ a jev *D*: $m = 4$,
c) jev *C*: $m + b = 9$ a jev *E*: $m > 3$, d) jev *F*: $m + b = 11$ a jev *G*: $m \neq 5$.

Při hodu rozlišujeme barvy kostek $\Rightarrow$ množinou všech možných výsledků bude množina všech uspořádaných dvojic čísel 1 až 6.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\ (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\ (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\ (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\ (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\ (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6) \end{Bmatrix}$$

a) jev *A*: $m + b = 7$ **a jev *B*:** $m = 3$
$P(A)$: možnosti, jak získat součet 7: $7 = 4 + 3 \Rightarrow 2$ možnosti, $7 = 5 + 2 \Rightarrow 2$ možnosti, $7 = 6 + 1 \Rightarrow 2$ možnosti $\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$P(B)$: možnosti, kde $m = 3$: celý třetí řádek tabulky $\Rightarrow$ 6 možností $\Rightarrow$ $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$P(A \cap B)$: možnosti, jak získat součet 7 a $m = 3$: jediná možnost $(3;4)$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $\Rightarrow$ jevy *A*: $m + b = 7$ a *B*: $m = 3$ jsou nezávislé.

b) jev *C*: $m + b = 9$ **a jev *D*:** $m = 4$
Zdánlivě stejný příklad jako v předchozím bodě.
$P(C)$: možnosti, jak získat součet 9: $9 = 4 + 5 \Rightarrow 2$ možnosti, $9 = 6 + 3 \Rightarrow 2$ možnosti $\Rightarrow$ $P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

$P(D)$: možnosti, kde $m = 4$: celý čtvrtý řádek tabulky $\Rightarrow$ 6 možností $\Rightarrow$ $P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$P(C \cap D)$: možnosti, jak získat součet 9 a $m = 4$: jediná možnost $(4;5)$ $\Rightarrow$ $P(C \cap D) = \frac{1}{36}$.

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(C) \cdot P(D) = P(C \cap D)$.

$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54} \neq \frac{1}{36}$ $\Rightarrow$ jevy *C*: $m + b = 9$ a *D*: $m = 4$ nejsou nezávislé $\Rightarrow$ někdy je doopravdy těžké dopředu odhadnout, zda jsou jevy závislé či ne.

c) jev *C*: $m+b=9$ **a jev *E*:** $m>3$

$P(E)$: možnosti, kde $m>3$: celý čtvrtý, pátý a šestý řádek tabulky $\Rightarrow$ 18 možností $\Rightarrow$

$P(E)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

$P(C\cap E)$: možnosti, jak získat součet 9 a $m>3$: tři možnosti $(4;5)$, $(5;4)$, $(6;3)$ $\Rightarrow$

$P(C\cap E)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(C)\cdot P(E)=P(C\cap E)$.

$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}\neq\frac{1}{12}$ $\Rightarrow$ jevy C: $m+b=9$ a E: $m>3$ nejsou nezávislé.

d) jev *F*: $m+b=11$ **a jev *G*:** $m\neq 5$

$P(F)$: možnosti, jak získat součet 11: $11=6+5\Rightarrow 2$ možnosti $\Rightarrow$ $P(F)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

$P(G)$: možnosti, kde $m\neq 5$: všechny řádky tabulky kromě pátého $\Rightarrow$ 30 možností $\Rightarrow$

$P(G)=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$.

$P(F\cap G)$: možnosti, jak získat součet 11 a $m\neq 5$: jediná možnost $(6;5)$ $\Rightarrow$

$P(F\cap G)=\frac{1}{36}$.

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(F)\cdot P(G)=P(F\cap G)$.

$\frac{1}{18}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{108}\neq\frac{1}{36}$ $\Rightarrow$ jevy F: $m+b=11$ a G: $m\neq 5$ nejsou nezávislé.

Př. 5: Petáková:
strana 172/cvičení 32
strana 172/cvičení 34

Shrnutí: Dva jevy nezávislé právě tehdy, když pravděpodobnost toho, že nastanou oba najednou, se rovná součinu pravděpodobností, že nastane každý z nich.