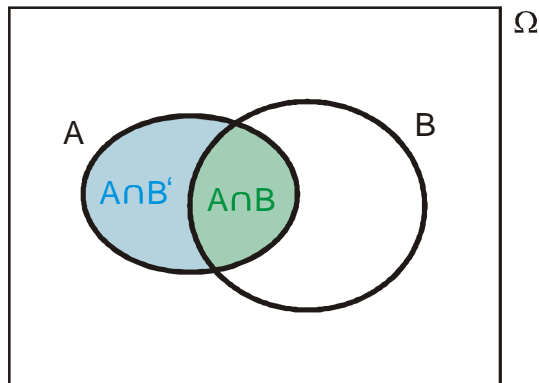


9.2.8 Nezávislé jevy II

Předpoklady: 9207

Jsou-li nezávislé jevy A a B . Jsou nezávislé i jevy A a B' ?

Pokud ano, musí platit $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$.



Z obrázku je vidět, že platí: $A \cap B' = A \cap (A \cap B)'$ \Rightarrow

$$P(A \cap B') = P\left(A \cap (A \cap B)'\right) = P(A) - P(A \cap B).$$

Použijeme nezávislost jevů A, B : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(B').$$

Jsou-li jevy A, B nezávislé, jsou nezávislé i dvojice jevů:

A, B' A', B A', B'

Př. 1: Na výrobku se vyskytují nezávisle na sobě tři druhy vad s pravděpodobnostmi:

$P(A) = 0,02$, $P(B) = 0,05$, $P(C) = 0,1$. Urči pravděpodobnost, že:

- a) výrobek má vady A, B ; b) výrobek má všechny tři vady A, B, C ;
c) výrobek má vady A, B a nemá vadu C ; d) výrobek je bez vady.

Všechny tři vady jsou nezávislé jevy \Rightarrow můžeme používat vzorce pro násobení pravděpodobností.

a) výrobek má vady A, B

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,02 \cdot 0,05 = 0,001$$

Tato pravděpodobnost neříká nic o tom, zda bude mít výrobek vadu C nebo ne.

b) výrobek má všechny tři vady A, B, C

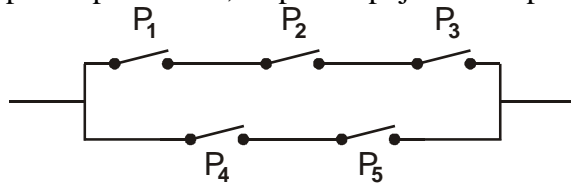
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,02 \cdot 0,05 \cdot 0,1 = 0,0001$$

c) výrobek má vady A, B a nemá vadu C

Pravděpodobnost, že výrobek nemá vadu $C = P(C') = 1 - P(C) = 1 - 0,1 = 0,9$.

$$P(A \cap B \cap C') = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C') = 0,02 \cdot 0,05 \cdot 0,9 = 0,0009$$

pravděpodobnost, že přes zapojení bude procházet elektrický proud.



Pokud má proud procházet přes zapojení musí procházet buď přes horní nebo přes dolní větev. V obou větvích platí, že proud prochází, pouze když budou všechny přepínače ve větvi v poloze zapnuto.

Pravděpodobnost, že proud prochází:

- přes horní větev $P(H) = P(P_1) \cdot P(P_2) \cdot P(P_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$,
- přes dolní větev $P(D) = P(P_4) \cdot P(P_5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Pokud má proud procházet přes zapojení musí procházet buď přes horní nebo přes dolní větev \Rightarrow hledáme sjednocení jevů H a D :

$P(H \cup D) = P(H) + P(D) - P(H \cap D)$ (oba jevy mohou nastat současně \Rightarrow musíme odečíst pravděpodobnost jejich průniku, abychom ji nezapočítali dvakrát),
 jevy H a D jsou nezávislé: $P(H \cap D) = P(H) \cdot P(D)$.

$$P(H \cup D) = P(H) + P(D) - P(H) \cdot P(D) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{32} \doteq 0,34$$

Elektrický proud bude přes zapojení procházet s pravděpodobností 0,34.

Poznámka: Předchozí příklad je možné řešit (podobně jako v bodu b) příkladu 3) i bez sčítání pravděpodobností (které je obecně nebezpečné kvůli zapomínání průníků).

Proud přes zapojení nebude procházet, když neprochází ani přes jednu z větví:

$$\text{Proud neteče: } P(H' \cap D') = P(H') \cdot P(D') = \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{32}.$$

$$\text{Proud teče: } 1 - P(H' \cap D') = 1 - \frac{21}{32} = \frac{11}{32}.$$

Sériové (paralelní) zapojení žárovek (přepínačů) v předchozích příkladech můžeme brát jako ukázky dvou základních zapojení funkčních částí složitějšího zařízení.

Sériové zapojení reprezentuje funkční části, které musí pracovat nezávisle na sobě **najednou**. Porucha libovolné takové části znamená poruchu celého zařízení.

Paralelní zapojení reprezentuje funkční části, u kterých stačí pokud funguje alespoň **jedna**. Porucha libovolné takové části neznamená poruchu celého zařízení. Celé zařízení přestane pracovat pouze v případě, že se porouchají všechny paralelně zapojené části. Paralelně zapojené části tak navzájem zálohují svou funkci.

U běžných přístrojů jsou všechny funkční části zapojeny bez zálohování („sériově“), zálohování funkce se používá pouze u přístrojů, u kterých je požadována vysoká spolehlivost (disky a zdroje důležitých serverů, ochranné systémy v jaderných elektrárnách, ...).

Př. 5: Přístroj je složený ze tří nezávislých funkčních celků, u každého z nich je uvedena pravděpodobnost nepřetržité funkčnosti po celou dobu životnosti přístroje a cena v tisících Kč. Navrhni zálohování funkčních celků tak, aby přístroj fungoval bez poruchy po celou dobu životnosti alespoň s pravděpodobností 0,85 a jeho cena byla co nejnižší. Celek A: pravděpodobnost 0,9, cena 10, celek B: pravděpodobnost 0,8, cena 5, celek C: pravděpodobnost 0,75, cena 1.

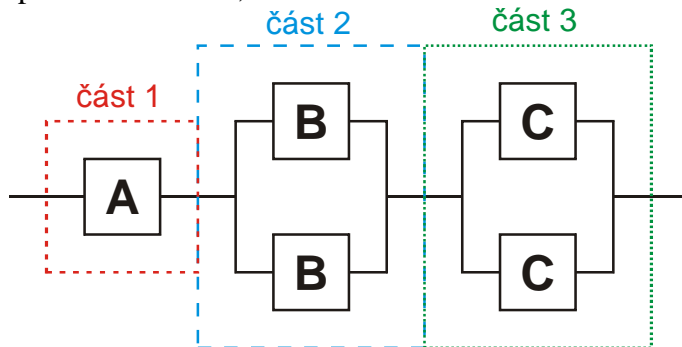
Analogicky se žárovkovými obvody si můžeme představit zapojení přístroje jako sériové zapojení celků A, B, C.



Přístroj bude funkční, pokud budou pracovat všechny tři celky:

$P(P) = P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,75 = 0,54 \Rightarrow$ musíme činnost některých celků zálohovat.

Zkusíme vytvořit z jednotlivých celků části, které budou zajišťovat dostatečnou spolehlivost jednotlivých celků, z předchozího výpočtu je zřejmé, že každá taková část musí mít větší spolehlivost než 0,85 \Rightarrow musíme zálohovat činnost celků B a C.



Pravděpodobnost funkčnosti části 2:

Část 2 funguje, když funguje alespoň jeden ze dvou celků B \Rightarrow nefunguje, když nefunguje ani jeden $\Rightarrow P(2') = P(B') \cdot P(B') = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$.

$$P(2) = 1 - P(2') = 1 - 0,04 = 0,96$$

Pravděpodobnost funkčnosti části 3:

Část 3 funguje, když funguje alespoň jeden ze dvou celků C \Rightarrow nefunguje, když nefunguje ani jeden $\Rightarrow P(3') = P(C') \cdot P(C') = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625$.

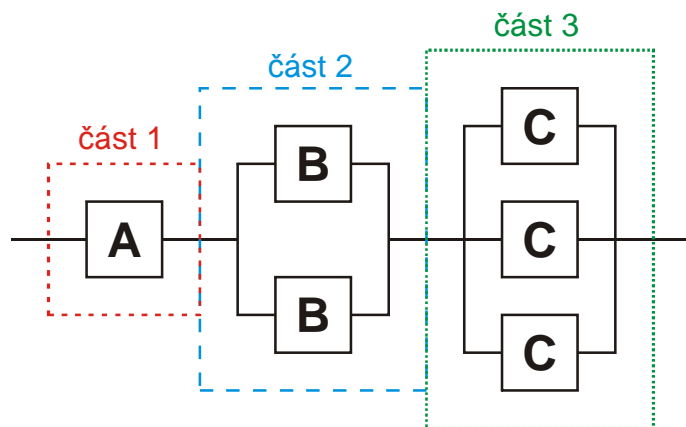
$$P(3) = 1 - P(3') = 1 - 0,0625 = 0,9375$$

Pravděpodobnost funkčnosti celého přístroje:

$$P(P) = P(1 \cap 2 \cap 3) = P(A) \cdot P(2) \cdot P(3) = 0,9 \cdot 0,96 \cdot 0,9375 = 0,81$$

Pravděpodobnost, že se přístroj neporouchá se značně zvětšila, ale zatím nedosahuje požadované hodnoty \Rightarrow musíme přidat ještě další zálohovací celek.

1. nápad – zazálohujeme celek A v části 1 (má nejmenší spolehlivost), ale je zdaleka nejdražší \Rightarrow zkusíme zvýšit spolehlivost části 3, přidáním dalšího bloku C.



Pravděpodobnost funkčnosti části 3:

Část 3 funguje, když funguje alespoň jeden ze tří celků $C \Rightarrow$ nefunguje, když nefunguje ani jeden $\Rightarrow P(3') = P(C') \cdot P(C') \cdot P(C') = 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 = 0,015625$.

$$P(3) = 1 - P(3') = 1 - 0,0625 = 0,9375$$

Pravděpodobnost funkčnosti celého přístroje:

$$P(P) = P(1 \cap 2 \cap 3) = P(A) \cdot P(2) \cdot P(3) = 0,9 \cdot 0,96 \cdot 0,9375 = 0,8055$$

\Rightarrow Podařilo se dosáhnout požadované spolehlivosti.

Cena přístroje: $1 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 23$ tisíc Kč.

Př. 6: Petáková:

strana 172/cvičení 33

strana 172/cvičení 35 c)

strana 172/cvičení 37

Shrnutí: Při výpočtech spolehlivosti se vyplatí přecházet mezi pravděpodobností jevů a jevů k nim opačných.