9.2.10 Binomické rozdělení

Předpoklady: 9209

Př. 1: Basketbalista hází trestný hod (šestku) s pravděpodobností úspěchu 0,9. Urči pravděpodobnosti, že z pěti hodů:
a) dá 5 košů; b) dá alespoň jeden koš;
c) dá nejdříve tři koše a pak dvakrát chybuje;
d) dá tři koše a udělá dvě chyby v libovolném pořadí.

Jednotlivé hody považujeme za nezávislé jevy (basketbalista je v péči psychologa, který zabraňuje tomu, aby v případě jednoho neúspěchu znervózněl) $\Rightarrow$ pravděpodobnosti výsledků jednotlivých hodů mezi sebou můžeme násobit.
a) dá 5 košů
Potřebujeme výsledek $K\,K\,K\,K\,K$ $\Rightarrow$ $P(a)=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9=0{,}9^5=0{,}59049\doteq 60\%$.

b) dá alespoň jeden koš
Alespoň jeden koš $\Rightarrow$ spousta různých možností (1 koš, 2 koše, …) s různými výpočty $\Rightarrow$ obrácený postup (vypočteme ani jeden a odečteme od jedné).
Ani jeden koš: $M\,M\,M\,M\,M$ $\Rightarrow$ $P(b')=0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1=0{,}1^5=0{,}00001$.
$P(b)=1-P(b')=1-0{,}00001=0{,}99999$

c) dá nejdříve tři koše a pak dvakrát chybuje
Potřebujeme výsledek $K\,K\,K\,M\,M$ $\Rightarrow$
$P(c)=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1=0{,}9^3\cdot 0{,}1^2=0{,}00729\doteq 0{,}729\%$.

d) dá tři koše a udělá dvě chyby v libovolném pořadí
Výsledek můžeme dosáhnout různými způsoby (navzájem se vylučujícími): $K\,K\,K\,M\,M$, $K\,M\,K\,M\,K$, $M\,M\,K\,K\,K,\dots$
Všechny mají stejnou pravděpodobnost, spočítanou v bodě c).
Kolik jich je? Dva možné postupy:

- vytváříme uspořádané pětice ze tří a dvou prvků $\Rightarrow$ $\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=\dbinom{5}{3}$ možností,
- vybíráme z pěti tři místa, kdy padne koš $\Rightarrow$ $\dbinom{5}{3}$ možností.

$\dbinom{5}{3}$ krát sčítáme pravděpodobnost $0{,}9^3\cdot 0{,}1^2$ $\Rightarrow$ $P(d)=\dbinom{5}{3}0{,}9^3\cdot 0{,}1^2=0{,}0729=7{,}29\%$

Pedagogická poznámka: Objeví se dva problémy:
Část studentů řeší bod c) takto $P(c)=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9=0{,}9^3$, zajímají se pouze o zdařilé hody a nezdařilé je nezajímají (je to zajímavé i kvůli tomu, že oba nezdary jsou v zadání explicitně zmíněny). Tento problém přetrvává v dalších příkladech a v dalších hodinách.
Studenti nezapočítávají možnosti, které přibudou, když nemáme určené pořadí

zdarů a nezdarů. Teprve argumentace tím, že pravděpodobnost v bodě d) musí být větší než v bodě c) je pro ně trochu přesvědčivá.

Př. 2: Náhodný pokus, který má dva možné výsledky (zdar, nezdar) s pravděpodobnostmi *p* (zdar), *q* (nezdar), provedeme *n* krát po sobě tak, že jednotlivá provádění jsou navzájem nezávislé pokusy. Urči pravděpodobnost:
a) všechna provedení skončí zdarem;
b) nejdříve *k* provedení pokusu skončí zdarem a zbývající pokusy nezdarem;
c) z *n* provedených pokusů skončí libovolných *k* zdarem.

a) všechna provedení skončí zdarem
Podobné jako bod a) z předchozího příkladu: potřebujeme výsledek $ZZZ...ZZ \Rightarrow$
$P(a) = p \cdot p \cdot p \cdot ... \cdot p \cdot p = p^n$.

b) nejdříve *k* provedení pokusu skončí zdarem a zbývající pokusy nezdarem
Podobné jako bod c) z předchozího příkladu: potřebujeme výsledek $\underbrace{ZZ...Z}_{k\,krát}\underbrace{NN...N}_{n-k\,krát} \Rightarrow$

$P(a) = p \cdot p \cdot ... \cdot p \cdot q \cdot q \cdot ... \cdot q = p^k q^{n-k}$.

c) z *n* provedených pokusů skončí libovolných *k* zdarem
Podobné jako bod d) z předchozího příkladu.
Stačí nám libovolný výsledek, který vznikne přerovnáním výsledku z bodu b) $\Rightarrow$ všechny mají pravděpodobnost $p^k q^{n-k}$. Kolik jich je?

- Vytváříme uspořádané *n*-tice z k a $(n-k)$ prvků $\Rightarrow \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$ možností,
- vybíráme z *n* míst *k* míst, kdy bude zdar $\Rightarrow \binom{n}{k}$ možností.

$\binom{n}{k}$ krát sčítáme pravděpodobnost $p^k q^{n-k} \Rightarrow P(c) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Pedagogická poznámka: Pokud si studenti při řešení předchozího příkladu nevědí rady, odkazuji je na příklad 1.

Mějme *n* nezávislých pokusů, z nichž každý skončí buď zdarem s pravděpodobností *p*, nebo nezdarem s pravděpodobností *q*. Potom pravděpodobnost jevu A_k, že právě *k* pokusů bude zdařilých, je
$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Proč se hodina nazývá binomické rozdělení?
Výraz $P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ připomíná člen binomické věty.
Binomický rozvoj dvojčlenu $(p+q)^n$:

$(p+q)^n = \binom{n}{0} p^n + \binom{n}{1} p^{k-1} q^1 + \ldots + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \ldots + \binom{n}{n} q^n \Rightarrow$ binomické rozdělení.

Krásně to pasuje: $p+q=1 \Rightarrow$

$(1)^n = 1 = (p+q)^n = \binom{n}{0} p^n + \binom{n}{1} p^{k-1} q^1 + \ldots + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \ldots + \binom{n}{n} q^n = 1 \Rightarrow$ vždy musí nastat jedna z možností v rozvoji $\Rightarrow$ jejich součet se rovná 1.

Př. 3: Urči pravděpodobnost, že rodina se čtyřmi dětmi má:
a) 2 hochy a 2 dívky; b) 3 hochy a 1 dívku.
Příklad řeš dvakrát jednou pro pravděpodobnosti 0,5, podruhé pro reálné pravděpodobnosti 0,51 pro hochy a 0,49 pro dívky. Řeš příklad jako několik nezávislých pokusů.

a) 2 hochy a 2 dívky

Pravděpodobnosti 0,5: $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,375 = 37,5\%$.

Pravděpodobnosti 0,51 pro hochy a 0,49 pro dívky: $\binom{4}{2} 0,51^2 \cdot 0,49^2 \doteq 0,3747 = 37,47\%$.

b) 3 hochy a 1 dívku

Pravděpodobnosti 0,5: $\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0,25 = 25\%$.

Pravděpodobnosti 0,51 pro hochy a 0,49 pro dívky: $\binom{4}{3} 0,51^3 \cdot 0,49^1 \doteq 0,259996 \doteq 26\%$.

Pedagogická poznámka: I přes pokyn v zadání se část studentů vrací do minulých hodin a dosazuje do zlomku pro počet všech možností.

Př. 4: Urči pravděpodobnost, že při deseti hodech mincí padne alespoň osmkrát líc.

Alespoň osmkrát líc $\Rightarrow$ osmkrát líc, nebo devětkrát líc nebo desetkrát líc:

- osmkrát líc: $\binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2$,
- devětkrát líc: $\binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1$,
- desetkrát líc: $\binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$,

jednotlivé možnosti se vylučují $\Rightarrow$ pravděpodobnosti můžeme sečíst, o průniky se nestaráme.

$$\binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left[\binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}\right] = 0,0546875 \doteq 5,5\%$$

Pedagogická poznámka: U předchozího a následujícího příkladu není problémem pouze sestavení výrazu, ale i jeho výpočet (i v případě, že mají studenti k dispozici kalkulačku). Chtějte to po nich, aby alespoň čtvrtý příklad dopočítali.

Př. 5: Student píše test, který obsahuje 15 otázek, ke každé otázce existují čtyři možné odpovědi, z nichž právě jedna je správná. Jaká je pravděpodobnost, že student odpoví správně na alespoň pět otázek (a test úspěšně splní), pokud problematiku vůbec neovládá a odpovědi volí náhodně? Jak se tato pravděpodobnost změní, pokud neplatí, že vždy existuje právě jedna správná odpověď, ale správné mohou být všechny nebo také žádná ze čtyř nabízených odpovědí?

Pravděpodobnost správné odpovědi na otázku:

čtyři odpovědi, jediná správná $\Rightarrow$ pravděpodobnost náhodné správné odpovědi $\frac{1}{4}$.

Alespoň pět správných odpovědí = pět správných odpovědí nebo šest správných odpovědí nebo sedm správných odpovědí nebo … nebo patnáct správných odpovědí:

- pět správných odpovědí: $\binom{15}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$,
- šest správných odpovědí: $\binom{15}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^{9}$,
- …,
- čtrnáct správných odpovědí: $\binom{15}{14}\left(\frac{1}{4}\right)^{14}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}$,
- patnáct správných odpovědí: $\binom{15}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{15}$.

Všechny tyto možnosti se navzájem vylučují $\Rightarrow$ mají prázdné průniky $\Rightarrow$ jejich pravděpodobnosti můžeme sečíst bez nutnosti odečítání průniků.

$$\binom{15}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^{10}+\binom{15}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^{9}+\ldots+\binom{15}{14}\left(\frac{1}{4}\right)^{14}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}+\binom{15}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{15}\doteq 0{,}3135=31{,}35\%$$

Jak se výsledky změní, když správně mohou být všechny nebo žádná z nabízených odpovědí? Kolik je možností jak odpovědět na otázku? Čtyři nabízené odpovědi, každou můžeme zaškrtnout nebo nechat $\Rightarrow$ uspořádané čtveřice ze dvou prvků (ano, ne) $\Rightarrow$ $2^4=16$ možností, jediná správná $\Rightarrow$ pravděpodobnost náhodné správné odpovědi $\frac{1}{16}$.

- Pět správných odpovědí: $\binom{15}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^5\left(\frac{15}{16}\right)^{10}$,
- šest správných odpovědí: $\binom{15}{6}\left(\frac{1}{16}\right)^6\left(\frac{15}{16}\right)^{9}$,
- …,
- čtrnáct správných odpovědí: $\binom{15}{14}\left(\frac{1}{16}\right)^{14}\left(\frac{15}{16}\right)^{1}$,

- patnáct správných odpovědí: $\binom{15}{15}\left(\frac{1}{16}\right)^{15}$.

Všechny tyto možnosti se navzájem vylučují $\Rightarrow$ mají prázdné průniky $\Rightarrow$ jejich pravděpodobnosti můžeme sečíst bez nutnosti odečítání průniků.

$$\binom{15}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{5}\left(\frac{15}{16}\right)^{10}+\binom{15}{6}\left(\frac{1}{16}\right)^{6}\left(\frac{15}{16}\right)^{9}+\ldots+\binom{15}{14}\left(\frac{1}{16}\right)^{14}\left(\frac{15}{16}\right)^{1}+\binom{15}{15}\left(\frac{1}{16}\right)^{15}\doteq 0,00168=0,168\%$$

Pokud je vždy právě jedna z odpovědí správná, má student, který pouze náhodně zaškrtává odpovědi, pravděpodobnost více než 31%, že test úspěšně složí. Pokud může být správnou odpovědí libovolná kombinace odpovědí, klesne tato pravděpodobnost na méně než 0,2%.

Poznámka: Předchozí příklad je možné (a výhodné) řešit pomocí pravděpodobnosti opačného jevu. Opačný jev k jevu alespoň pět správných odpovědí, je jev nejvýše čtyři správné odpovědi. Pravděpodobnost tohoto jevu určíme takto:

žádná správná odpověď: $\binom{15}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{15}$,

jedna správná odpovědí: $\binom{15}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{14}$,

dvě správné odpovědi: $\binom{15}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{13}$,

tři správné odpovědi: $\binom{15}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{12}$,

čtyři správné odpovědi: $\binom{15}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{11}$,

$\Rightarrow$ nejvýše čtyři odpovědi:

$$\binom{15}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{15}+\binom{15}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{14}+\binom{15}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{13}+\binom{15}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{12}+\binom{15}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{11}$$

opačný jev:

$$1-\binom{15}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{15}+\binom{15}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{14}+\binom{15}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{13}+\binom{15}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{12}+\binom{15}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{11}=$$

$\doteq 0,3135=31,35\%$

Př. 6: Petáková:
strana 174/cvičení 61
strana 175/cvičení 62

Shrnutí: Při výpočtu pravděpodobnosti, že při n pokusech dojde ke k zdarů, sčítáme $\binom{n}{k}$ stejných pravděpodobností $p^k q^{n-k}$.