9.2.11 Ověřování hypotéz

Předpoklady: 9210

- Testování nového léku: Někteří nemocní se uzdraví i při klasické léčbě. Jde u konkrétního uzdravení o zásluhu nového léku nebo testovaný patřil mezi šťastné, kteří by se uzdravili i bez něj?
- Senzibil hledá zakopaný poklad: Najde ho opravdu kvůli svým nadpřirozeným schopnostem nebo jde pouze o náhodu?
- Odborník na vína určuje značky podle chuti: Pozná je díky svým trénovaným chuťovým pohárkům nebo jde jen o náhodu?

Ve všech uvedených případech můžeme kvalifikovaně rozhodnout teprve poté, co si spočteme, s jakou pravděpodobností můžeme výsledku dosáhnout pouze pomocí náhody.

Př. 1: Senzibil tvrdí, že dokáže pomocí virgule najít v zemi zakopaný zlatý poklad. Jeho schopnosti jsou testovány dvojitým slepým pokusem. Na zorané zahradě jeden z členů pokusného týmu zakope poklad, zapíše do dokumentace jeho umístění a odejde pryč. Povrch zahrady je zarovnán a pak přijde senzibil s druhým členem pokusného týmu a označí místo zakopání pokladu. Zahrada je rozdělena na 50 čtverců, poklad je zakopán vždy do středu jednoho z nich a senzibil je považován za úspěšného v případě, že označí správný čtverec. Proč nedoprovází senzibila stejný člen pokusného týmu, který zakopal poklad? Jaká je pravděpodobnost, že místo umístění pokladu náhodně uhádne i člověk bez zvláštních schopností?
Jaká je pravděpodobnost, že senzibil najde poklad náhodně:
a) alespoň dvakrát ze tří pokusů, b) alespoň třikrát z pěti pokusů?

Senzibila nesmí vyprovázet člověk, který zná umístění pokladu proto, aby senzibil nemohl z jeho chování poznat, zda se nachází ve čtverci s pokladem nebo ve čtverci bez pokladu.

Pravděpodobnost náhodného určení správného čtverce: $P(Z)=\frac{1}{50}$.

Pravděpodobnost náhodného určení nesprávného čtverce: $P(N)=\frac{49}{50}$.

a) pravděpodobnost náhodného nalezení alespoň dvakrát ze tří pokusů
Najdeme poklad náhodně alespoň dvakrát ze tří pokusů:

- právě dvakrát: $P(2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{50}\right)^2\left(\frac{49}{50}\right)$,
- právě třikrát: $P(3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{50}\right)^3$,

celkově: $P(A)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{50}\right)^2\left(\frac{49}{50}\right)+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{50}\right)^3=0{,}0012$.

b) alespoň třikrát z pěti pokusů
Najdeme poklad náhodně alespoň třikrát z pěti pokusů:

- právě třikrát: $P(3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{50}\right)^3\left(\frac{49}{50}\right)^2$,
- právě čtyřikrát: $P(4)=\binom{5}{4}\left(\frac{1}{50}\right)^4\left(\frac{49}{50}\right)^1$,
- právě pětkrát: $P(5)=\binom{5}{5}\left(\frac{1}{50}\right)^5$,

celkově: $P(B)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{50}\right)^3\left(\frac{49}{50}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{1}{50}\right)^4\left(\frac{49}{50}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{1}{50}\right)^5=7,8\cdot 10^{-5}$.
V obou případech je pravděpodobnost náhodného uhádnutí pokladu velmi nízká. V bodu b), kde připouštíme více chyb, překvapivě nižší než v bodě a).

Pedagogická poznámka: Opět někteří zapomenou, že kromě pravděpodobností nalezení musí v jednotlivých variantách pracovat s pravděpodobnostmi nenalezení pokladu a píší výrazy typu $P(2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{50}\right)^2$.

Př. 2: Za normálních okolností je pravděpodobnost onemocnění slepic hypoglynální ospereotázou 0,3. Na původně *n* zdravých kusech testujeme účinnost nové vakcíny. Urči pravděpodobnost, že infekce zůstane ušetřeno i v případě, že je vakcína zcela neúčinná: a) 7 slepic ze 7; b) 10 slepic z 10; c) alespoň 19 slepic z 20; d) alespoň 28 slepic z 30.

Analogický postup jako v předchozím příkladu.
a) infekci nedostane 7 slepic ze 7

$$P(A)=\binom{7}{7}0,7^7=0,082$$

b) infekci nedostane 10 slepic z 10

$$P(B)=\binom{10}{10}0,7^{10}=0,028$$

c) infekci nedostane alespoň 19 slepic z 20

$$P(C)=\binom{20}{19}\cdot 0,7^{19}\cdot 0,3^1+\binom{20}{20}\cdot 0,7^{20}=0,0076$$

d) infekci nedostane alespoň 28 slepic z 30

$$P(D)=\binom{30}{28}\cdot 0,7^{28}\cdot 0,3^2+\binom{30}{29}\cdot 0,7^{29}\cdot 0,3^1+\binom{30}{30}\cdot 0,7^{30}=0,0021$$

Stejně jako u předchozího příkladu je vidět, jak s počtem testovaných klesá pravděpodobnost náhodného dosažení potřebných výsledků.

Př. 3: Na xendilogózu humperlich umírá průměrně každý pátý nakažený. Jaký nejvyšší počet ze třiceti zkoumaných pacientů může i přes podání léku zemřít, aby pravděpodobnost, že jde o náhodu a nový lék je zcela neúčinný, byla menší než 2%?

Budeme postupně počítat pravděpodobnosti s nejvyššími počty uzdravených a sčítat jejich pravděpodobnosti.

Pravděpodobnost uzdravení: $P(Z)=\frac{4}{5}$, pravděpodobnost smrti $P(N)=\frac{1}{5}$.
Pravděpodobnosti budeme označovat podle počtu zemřelých.
Uzdraví se všichni nakažení (nikdo nezemře): $P(0)=\binom{30}{30}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{30}=0{,}0012$.
Neuzdraví se nejvýše jeden pacient: $P(1)=\binom{30}{30}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{30}+\binom{30}{29}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{29}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{1}=0{,}011$.
Neuzdraví se nejvýše dva pacienti:
$P(2)=\binom{30}{30}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{30}+\binom{30}{29}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{29}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{1}+\binom{30}{28}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{28}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2}=0{,}044$. To už je více, než jsme chtěli.
Při testování může zemřít nejvýše jeden pacient, aby pravděpodobnost, že se pacienti uzdravili a lék je neúčinný, byla menší než 2%.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je pro studenty těžký zejména tím, že nemají v zadání přesně předepsáno, jak mají postupovat. Navíc postup, který nevede ke konečnému přesnému výsledku, ale spočívá na postupném zkoušení, jde zcela proti jejich školní zkušenosti.

Př. 4: Václav P. z 4.2011 se považuje za znalce plnotučného UHT mléka v tetrapackových krabicích. Spolužáci mu připravili sedm kusů z různých mlékáren, jeho úkolem je ke každému mléku přiřadit jeho výrobce. Jaká je pravděpodobnost, že uhádne:
a) všechny výrobce,
b) jednou se zmýlí,
c) zmýlí se právě dvakrát,
d) zmýlí se maximálně třikrát?

Přiřazení mlék k jejich výrobci $\Rightarrow$ musíme vytvořit jedno správné pořadí $\Rightarrow$ $7!$ možných výsledků. Určované pravděpodobnosti označujeme podle počtu chyb.
a) pravděpodobnost, že uhádne všechny výrobce
Jedna jediná příznivá možnost $\Rightarrow$ pravděpodobnost $P(0)=\frac{1}{7!}=2{,}0\cdot 10^{-4}$ (náhoda je prakticky vyloučena).
b) pravděpodobnost, že se jednou zmýlí
Vytváříme pořadí $\Rightarrow$ nemůžeme umístit špatně jenom jedno mléko (zmýlíme se minimálně ve dvou, jejichž umístění prohodíme) $\Rightarrow$ $P(1)=\frac{0}{7!}=0$.
c) pravděpodobnost, že se zmýlí právě dvakrát
Zmýlíme se právě dvakrát $\Rightarrow$ prohodíme mezi sebou dvě mléka:

- $\binom{7}{2}$ možností, jak vybrat mléka, která prohodíme,
- 1 možnost, jak mléka mezi sebou prohodit,

$\Rightarrow$ $P(2)=\frac{\binom{7}{2}\cdot 1}{7!}=4{,}2\cdot 10^{-3}$.
d) pravděpodobnost, že se zmýlí maximálně třikrát
Nejdříve určíme pravděpodobnost, jak se zmýlit právě třikrát $\Rightarrow$ prohodíme mezi sebou tři mléka, takže žádné nezůstane na svém správném místě:

* $\binom{7}{3}$ možností, jak vybrat mléka, která prohodíme,
* 2 možnosti, jak tři mléka mezi sebou prohodit, aby žádné nebylo na svém místě (označíme-li je A, B, C, a je-li ABC správné pořadí, zbývají nám z šesti možností prohazování mlék ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA jen dvě BCA a CAB, kdy žádné z mlék není na svém místě,

$$\Rightarrow \; P(3)=\frac{\binom{7}{3}\cdot 2}{7!}=0,014\,.$$

$$P(D)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)=2,0\cdot 10^{-4}+0+4,2\cdot 10^{-3}+0,014=0,018$$

Pokud se Vašek zmýlí maximálně třikrát, je velmi pravděpodobné, že je opravdovým znalcem UHT mléka, protože pravděpodobnost, že by takto určil výsledky náhodně, je pouze 0,018.

Pedagogická poznámka: Není reálné očekávat, že by studenti dokázali předchozí příklad vyřešit sami (maximálně určí počet všech možných výsledků), proto řešíme příklad napůl společně.

Shrnutí: Hypotézy o funkčnosti můžeme ověřovat tím, že si určíme pravděpodobnost náhodného úspěchu.