9.2.13 Podmíněné pravděpodobnosti II

Předpoklady: 9212

Př. 1: Ve 4.2011 se při sdělování známek z ústní maturitní zkoušky bude měřit hlasitost kamene, který bude úspěšným maturantům padat ze srdce. Odborné odhady favorizovaly na nejvyšší hlasitost Jana B. s pravděpodobností 0,6, druhým v pořadí byl Jan S. s pravděpodobností 0,3. Jan B. však při přírodní katastrofě ztratil svůj pečlivě vedený sešit, neznal aktuální internetovou adresu učebnice a nemohl se tak kvalitně připravit na čtvrtletní písemnou práci, kterou napsal nedostatečně a nebude připuštěn k maturitě. Jaká je nyní pravděpodobnost, že nejhlasitější pád kamene bude naměřen u Jana S.?

V zadání jsou zmíněny dva možné výsledky pokusu:

- vyhraje Jan B. $P(B)=0,6$,
- vyhraje Jan S. $P(S)=0,3$.

Jan B. nejde k maturitní zkoušce $\Rightarrow$ nastal jev B' $\Rightarrow$ máme určit pravděpodobnost jevu S za podmínky, že došlo k jevu B'.

Podle vzorce z minulé hodiny: $P(S|B')=\frac{P(S\cap B')}{P(B')}$, víme $P(B')=1-P(B)=1-0,6=0,4$,

$P(S\cap B')=P(S)$ (Jan S. může vyhrát pouze v případě, že Jan B. nevyhraje).

Dosadíme: $P(S|B')=\frac{P(S)}{P(B')}=\frac{0,3}{0,4}=0,75$.

V měření o nejhlasitější kámen padající ze srdce po odpadnutí Jana B. zvítězí Jan S. s pravděpodobností 0,75.

Pedagogická poznámka: Moc žáků na předchozí příklad samostatně nepřijde, zejména s tím, že nepoužívají přímo pravděpodobnost $P(B)$, ale její doplněk je pro ně těžko přijatelná.

Dosud jsme používali vzorce na určování podmíněných pravděpodobností. Vztahy však můžeme používat i obráceným způsobem například pro určení pravděpodobnosti průniku.

Nezávislé jevy: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Závislé jevy: platí $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ $\Rightarrow$ $P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)$. Ve výsledku můžeme prohodit význam jevů A a B a získáme tak **vzorec pro násobení pravděpodobností:** $P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)=P(B|A)\cdot P(A)$.

Př. 2: Při výzkumu počítačové gramotnosti se zjistilo, že pouze 65% studentů dokáže zapnout počítač s vypojeným napájecím kabelem a z těchto 65% studentů se pouze 30% dokáže přihlásit k počítači bez fungující myši. Urči pravděpodobnost, že se náhodně vybraný student dokáže přihlásit k odpojenému počítači bez fungující myši.

Známe pravděpodobnosti: $P(B)=0,65$ (student dokáže zapojit počítač) a $P(A|B)=0,30$ (student, který zapojil počítač, se dokáže přihlásit) $\Rightarrow$ můžeme požít vzorec $P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)=0,65\cdot 0,30=0,195$.

Pravděpodobnost, že se náhodně vybraný student dokáže přihlásit od odpojenému počítači bez fungující myši je 0,195.

Pedagogická poznámka: Teprve v bodě b) následujícího příkladu začíná většina třídy pracovat samostatně.

Př. 3: V osudí jsou čtyři bílé a šest modrých koulí. Jednu kouli vytáhneme, do osudí ji nevracíme a ze zbylých koulí táhneme druhou. Urči pravděpodobnost, že:
a) nejdříve vytáhneme bílou a pak modrou kouli;
b) nejdříve vytáhneme modrou a pak bílou kouli;
c) v obou tazích vytáhneme kouli stejné barvy.

a) nejdříve vytáhneme bílou a pak modrou kouli

První táhneme bílou: $P(B_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ (z deseti koulí v osudí jsou čtyři bílé).

Druhou po první bílé táhneme modrou: $P(M_2|B_1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ (z devíti zbývajících koulí v osudí je šest modrých).

Nejdříve vytáhneme bílou a pak modrou kouli: $P(M_2\cap B_1)=P(M_2|B_1)\cdot P(B_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$.

b) nejdříve vytáhneme modrou a pak bílou kouli

První táhneme modrou: $P(M_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ (z deseti koulí v osudí je šest modrých).

Druhou po první modré táhneme bílou: $P(B_2|M_1)=\frac{4}{9}$ (z devíti zbývajících koulí v osudí je šest modrých).

Nejdříve vytáhneme modrou a pak bílou kouli: $P(B_2\cap M_1)=P(B_2|M_1)\cdot P(M_1)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{15}$.

c) v obou tazích vytáhneme kouli stejné barvy

Tento jev se skládá ze dvou jevů s prázdným průnikem: vytáhneme dvě modré nebo dvě bílé koule.

První táhneme modrou: $P(M_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ (z deseti koulí v osudí je šest modrých).

Druhou po první modré táhneme modrou: $P(M_2|M_1)=\frac{5}{9}$ (z devíti zbývajících koulí v osudí je pět modrých).

Vytáhneme dvě modré koule: $P(M_2\cap M_1)=P(M_2|M_1)\cdot P(M_1)=\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{3}$.

První táhneme bílou: $P(B_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ (z deseti koulí v osudí jsou čtyři bílé).

Druhou po první bílé táhneme bílou: $P(B_2|B_1)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ (z devíti zbývajících koulí v osudí jsou tři bílé).

Vytáhneme dvě bílé koule: $P(B_2 \cap B_1)=P(B_2|B_1)\cdot P(B_1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$.

Vytáhneme koule stejné barvy: $P(S)=P(M_2 \cap M_1)+P(B_2 \cap B_1)=\frac{1}{3}+\frac{2}{15}=\frac{7}{15}$

S výsledky předchozího příkladu můžeme dál pracovat.
Kontrola: jednotlivé body pokývají všechny možnosti $\Rightarrow$ součet určených pravděpodobnostní se musí rovnat jedné:

$$P(M_2 \cap B_1)+P(B_2 \cap M_1)+P(M_2 \cap M_1)+P(B_2 \cap B_1)=\frac{4}{15}+\frac{4}{15}+\frac{5}{15}+\frac{2}{15}=\frac{15}{15}=1$$

Můžeme určit pravděpodobnost jevu M_2 „jako druhou vytáhneme modrou kouli“, můžeme ji vytáhnout dvěma způsoby:

- $P(M_2 \cap B_1)=P(M_2|B_1)\cdot P(B_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$,
- $P(M_2 \cap M_1)=P(M_2|M_1)\cdot P(M_1)=\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{3}$.

Oba tyto jevy mají prázdný průnik $\Rightarrow$ jejich pravděpodobnosti můžeme sečíst.

$$P(M_2)=P(M_2 \cap B_1)+P(M_2 \cap M_1)=$$

$$=P(M_2|B_1)\cdot P(B_1)+P(M_2|M_1)\cdot P(M_1)=\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

Předchozí vztah se zapisuje jako **vzorec pro celkovou pravděpodobnost jevu *A***.
Mějme dva jevy, B_1, B_2, které se vzájemně vylučují, přičemž jeden z nich nutně nastává ($B_1 \cap B_2=\emptyset$, $B_1 \cup B_2=\Omega$), potom pro libovolný jev *A* platí:

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

Př. 4: V osudí jsou tři bílé a sedm modrých koulí. Urči pravděpodobnost, že jako druhou vytáhneme bílou kouli.

Použijeme stejné značení jako u předchozího příkladu a dosadíme do vzorce pro celkovou pravděpodobnost: $P(B_2)=P(B_2|B_1)\cdot P(B_1)+P(B_2|M_1)\cdot P(M_1)$.

$P(B_1)=\frac{3}{10}$, $p(B_2|B_1)=\frac{2}{9}$ (z devíti zbývajících koulí jsou dvě bílé)

$P(M_1)=\frac{7}{10}$, $p(B_2|M_1)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ (z devíti zbývajících koulí jsou tři bílé)

$$P(B_2)=P(B_2|B_1)\cdot P(B_1)+P(B_2|M_1)\cdot P(M_1)=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$$

Pravděpodobnost, že jako druhou vytáhneme bílou kouli je 0,3.

Př. 5: Ve třídě 4.2011 je 8 hochů a 20 dívek. Dlouhodobé výzkumy ukazují, že pravděpodobnost, že náhodně vyvolaná dívka ovládá červený rámeček, je 55%. U náhodně vybraného hocha je pravděpodobnost znalosti pouze 30%. Urči pravděpodobnost, že náhodně vybraný žák třídy 4.2011 umí červený rámeček.

Pravděpodobnost vybrání dívky $P(D)=\frac{20}{28}=\frac{5}{7}$, pravděpodobnost vybrání hocha $P(H)=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$, pravděpodobnost znalosti rámečku, jeli vybrána dívka $P(Z|D)=0,55$, pravděpodobnost znalosti rámečku, jeli vybrán hoch $P(Z|H)=0,30$.

Pravděpodobnost znalosti rámečku pomocí vzorce pro celkovou pravděpodobnost:

$$P(Z)=P(Z|D)\cdot P(D)+P(Z|H)\cdot P(H)=0,55\cdot\frac{5}{7}+0,30\cdot\frac{2}{7}=\frac{67}{140}=0,48$$

Shrnutí: