

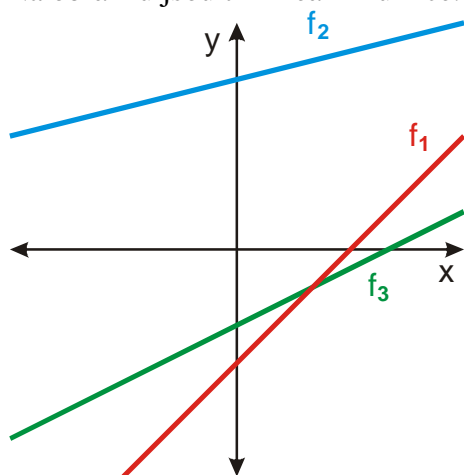
10.2.2 Derivace funkce v bodě

Předpoklady: 100201

Dávné vzpomínky

Nejjednodušší typ funkce: lineární funkce $y = ax + b$, hodnota parametru a nám říká, jak rychle funkce roste nebo klesá (jak se mění její hodnoty).

Př. 1: Na obrázku jsou tři lineární funkce. Která z nich roste nejrychleji, která nejpomaleji?

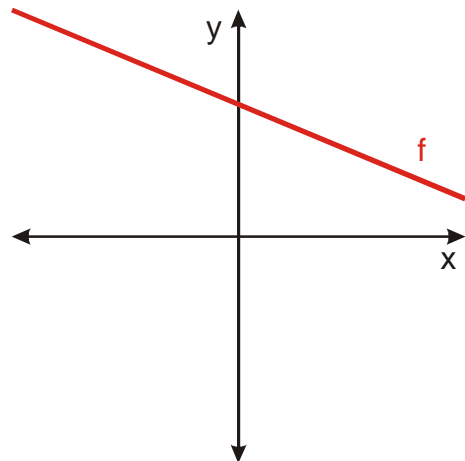


Nejrychleji roste funkce f_1 (její graf je nejstrmější), nejpomaleji funkce f_2 (její graf je nejpozvolnější).

Pedagogická poznámka: Špatná řešení vycházejí z toho, že funkce f_2 je na obrázku (úmyslně) nakreslena nejvýše. Pokud se tato chyba objeví, je třeba diskuse, které povede k tomu, že vůbec nezáleží na tom, jak vysoko je v daném místě graf funkce umístěn, ale pouze na tom, jak strmá je čára. Záměna hodnoty (výšky grafy) a změny (strmosti grafu) je velmi častým problémem při odhadování derivací.

Př. 2: Načrtni graf libovolné lineární funkce, která klesá.

Graf funkce musí směřovat z levého horního rohu do pravého dolního.

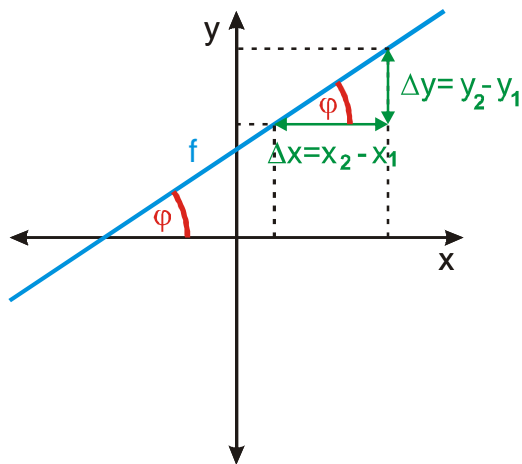


Př. 3: Kterým číslem charakterizujeme míru růstu lineární funkce. Jak se toto číslo počítá, pokud známe dva body grafu funkce?

Míru růstu lineární funkce charakterizuje hodnota parametru a , která také udává $\operatorname{tg} \varphi$ (φ je úhel, který graf svírá s kladnou poloosou x).

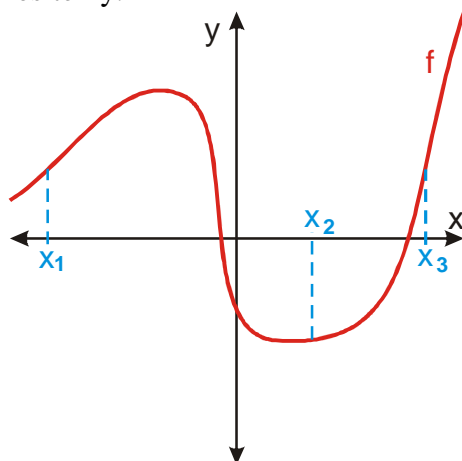
Hodnotu a můžeme vypočítat ze dvou bodů grafu, buď dosazením do rovnice $y = ax + b$ nebo

$$\text{vzorcem } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Určit, jak rychle funkce roste nebo klesá, není u lineární funkce nic těžkého. Zkusíme, zda by něco podobného šlo provést i u složitějších funkcí, které nejsou lineární (lineární funkce situaci zjednodušuje tím, že se mění pořád stejným způsobem a její změna je v každém bodě stejná).

Př. 4: Na obrázku je graf funkce $y = f(x)$. Porovnej, jak rychle roste ve vyznačených bodech. Jak velkou část grafu musí být okolo každého z bodů vidět, aby byl příklad řešitelný.

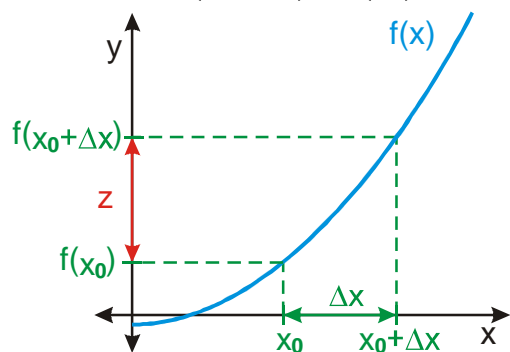


Funkce $y = f(x)$ roste nejrychleji v bodě x_3 (graf je v něm nejstrmější), nejpomaleji v bodě x_2 (graf je v něm nejpozvolnější).

K vyřešení příkladu stačí vidět libovolně malou část grafu funkce v okolí bodu, ve kterém máme porovnat rychlost růstu.

Ve zbytku hodiny nebudeme rozlišovat, zda se hodnoty funkce zvětšují nebo zmenšují. Budeme zkoumat obojí dohromady jako míru růstu funkce v okolí libovolného bodu x_0 .

Zkusíme vypočítat míru růstu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 . Míra růstu závisí na tom, jak se změnila hodnoty funkce \Rightarrow musíme porovnávat hodnoty funkce na dvou místech \Rightarrow zvolíme si vedle bodu x_0 další bod o Δx dál (tedy $\Delta x \geq 0$) a vypočteme, jak se změnila hodnota funkce: $z = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$.



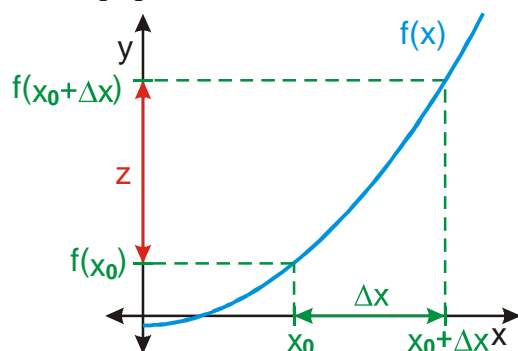
Př. 5: Jak z hodnoty čísla $z = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ určíme, zda funkce roste nebo klesá?

Platí:

- $z > 0 \Rightarrow$ funkce f roste (protože $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, bod více vpravo je výše),
- $z < 0 \Rightarrow$ funkce f klesá (protože $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, bod více vpravo je níže).

Př. 6: Najdi důvody, proč číslo $z = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ není správnou charakteristikou míry růstu funkce v bodě x_0 .

Velikost čísla z závisí na volbě Δx . Čím větší zvolíme Δx , tím větší hodnotu z získáme (v našem případě), míra růstu funkce v bodě x_0 je však ve všech případech stejná.



Vrátíme se k vzorci pro výpočet směrnice lineární funkce $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, kde jsme žádný

problém s určením míry růstu neměli. Přepíšeme vzorec podle značení, které jsme použili při výpočtu čísla z :

- $x_1 = x_0$,
- $x_2 = x_0 + \Delta x$,
- $y_1 = f(x_1) = f(x_0)$,
- $y_2 = f(x_2) = f(x_0 + \Delta x)$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Čitatel se shoduje s naším výrazem pro míru růstu funkce (a je tedy závislý na volbě Δx), vzorec navíc obsahuje jmenovatel Δx .

Řeší tato změna problémy se závislostí na volbě Δx ?

Minimálně částečně ano: Při volbě většího Δx získáme větší $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, ale získané větší číslo dělíme větším Δx , což výsledek zase zmenší \Rightarrow použijeme tento vzorec

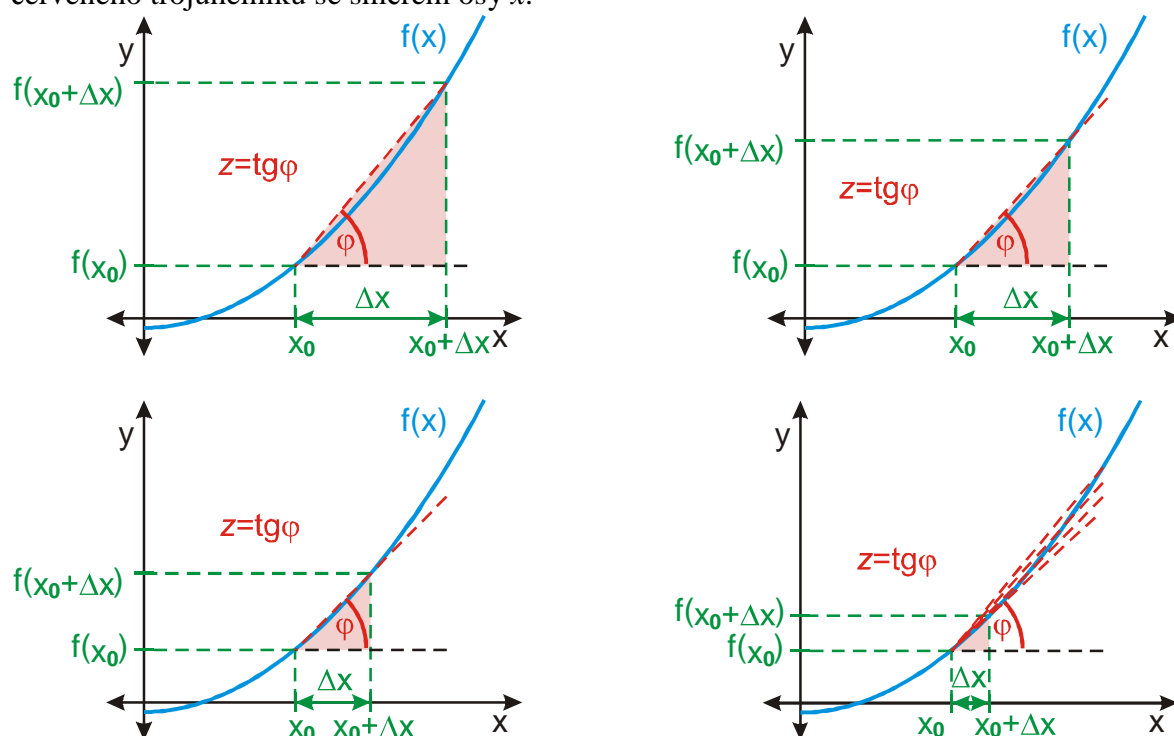
jako vylepšenou verzi vztahu pro míru růstu funkce v bodě x_0 : $z = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Vyřešili jsme problémy se závislostí na volbě Δx úplně?

Př. 7: Nakresli několik obrázků naší funkce s různou zvolenou velikostí Δx . Závísí

hodnota $z = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ na volbě Δx ? Proč?

z je stejně jako parametr a u lineární funkce $\text{tg} \varphi$, kde φ je úhel, který svírá přepona červeného trojúhelníku se směrem osy x .



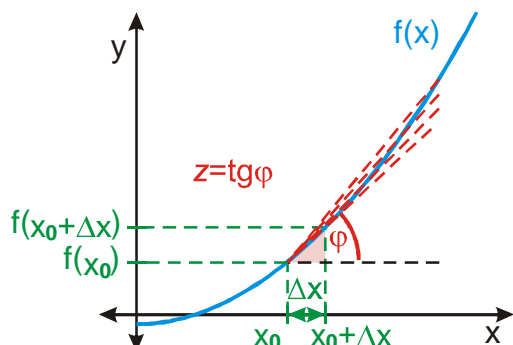
V posledním obrázku jsou nakresleny směry všech čtyř přepon červeného trojúhelníka \Rightarrow

hodnota změny $z = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ závisí na volbě Δx . Sklon grafu funkce se mění

a protože se změnou Δx se mění druhý bod, který využíváme ke konstrukci červeného trojúhelníku, mění se i hodnota změny z .

U lineární funkce tento problém nenastává, protože její graf má ve všech bodech stejným sklon.

Př. 8: Pro jakou volbu Δx získáme v předchozím příkladu přesnější výsledek?



Čím menší volíme Δx tím více směr přepony červeného trojúhelníka shoduje se směrem grafu funkce v bodě x_0 .

Už chvíli víme, že nám k určení míry růstu funkce v libovolném místě stačí prozkoumat libovolně malé okolí tohoto bodu. Navíc čím menší Δx používáme, tím přesnější údaj o míře růstu získáváme $\Rightarrow z = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ pro co nejmenší $\Delta x \Rightarrow$ nepřesnější

hodnotu získáme, když spočteme limitu: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Problém?!

Můžeme si dovolit výraz $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ vůbec spočítat. Jak může náš pokus dopadnout?

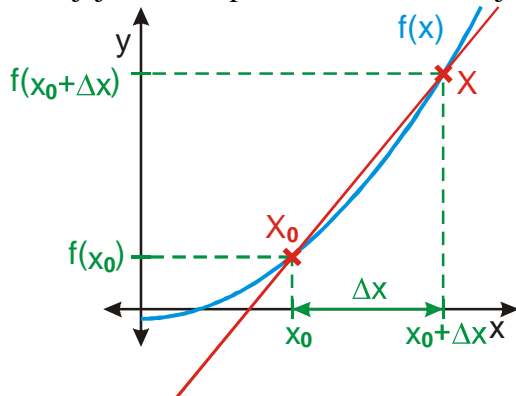
- Děláme $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \Rightarrow$ ve jmenovateli zlomku se objeví nula a to není možné.
- Děláme $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$, oba body grafu se přibližují k sobě \Rightarrow čítec
 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ se blíží k nule \Rightarrow vyjde vždy nula a to určitě není správně.
- Děláme $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$, jak čítec tak jmenovatel se blíží k nule \Rightarrow jako jejich poměr však stále může vyjít rozumné číslo (už jsme u limit takové situace zažili, limita nepopisuje to, co se děje přesně v bodu x_0 , ale to k čemu situace směřuje, když se k bodu x_0 nekonečně přibližujeme).

Zkusíme se na problém podívat z jiného úhlu.

Se změnou funkce souvisí směrnice tečny grafu (čím rychleji funkce roste, tím strmější je tečna) \Rightarrow prozkoumáme tečnu grafu v bodě x_0 .

Rovnice přímky procházející bodem $X_0[x_0, y_0]$: $y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow$ potřebujeme určit směrnici k v bodě $X_0[x_0, y_0]$. Nevíme, jak ji najít přesně \Rightarrow zkusíme ji určit přibližně a pak náš odhad postupně zpřesnit.

Přímku, která je přibližně tečnou v bodě $X_0[x_0, f(x_0)]$, nahradíme přímkou, která prochází bodem $X_0[x_0, f(x_0)]$ a bodem $X[x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)]$ (není přesnou tečnou, ale dokážeme určit její rovnici, protože umíme určit její směrnici).



Směrnice přímky $k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (získali jsme stejný zlomek, jako před okamžikem, když jsme se snažili určit míru změny funkce).

Směrnici tečný získáme tím přesněji, čím blíže bodu x_0 bude bod $x_0 + \Delta x \Rightarrow$ tím přesněji, čím menší bude $\Delta x \Rightarrow$ stejně jako před chvílí se dostáváme k limitě

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Znamená to, že jsme opět v koncích?

Rozhodně ne. Nevíme, zda je možné vyjádřit změnu funkce v bodě zcela přesně nějakým číslem, ale víme, že graf funkce má v bodě x_0 tečnu, že tato tečna musí mít směrnici a že tato

směrnice je rozumné reálné číslo \Rightarrow limita $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ nevede ani k jednomu z nepěkných výsledků, ale k rozumnému reálnému číslu.

Naše úvahy dovedeme do konce na konkrétním příkladu, u kterého známe řešení. Takový příklad máme k dispozici díky fyzice.

Zlomek $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ známe z fyziky ve tvaru $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. I tady jsme si říkali, že

výsledek $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ je pouze přibližným odhadem okamžité rychlosti, ke kterému se budeme blížit

tím lépe, čím kratší Δt použijeme. Ideálním případem pak je limita $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ (okamžitá

rychlost vyjadřuje změnu dráhy v čase, "je záležitostí jediného konkrétního okamžiku, stejně jako změna a tečna jsou záležitostí jediného bodu v grafu").

Zabývat se budeme rovnoměrně zrychleným pohybem (pro jednoduchost s nulovou počáteční rychlostí).

Známe:

- původní funkci: závislost dráhy na čase - $y = \frac{1}{2}at^2$,
- odvozenou funkci, která popisuje změnu původní funkce v čase: závislost okamžité rychlosti na čase - $v = at$.

Tedy známe nejen zadání, ale i výsledek \Rightarrow můžeme uplatnit naše předchozí úvahy a na výsledku zkontrolovat, zda jsou správné.

Dosadíme do výpočtu změny původní funkce (místo x používáme klasické označení času t):

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}a(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}a(t_0)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}a(t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2) - \frac{1}{2}at_0^2}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}at_0^2 + \frac{1}{2}a2t_0\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 - \frac{1}{2}at_0^2}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{at_0\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(at_0 + \frac{a\Delta t}{2} \right) = at_0 + 0 = at_0 \end{aligned}$$

Protože jsme nekladli žádné podmínky ohledně času t_0 , ve kterém jsme změnu dráhy určovali, můžeme za t_0 dosadit libovolné t a ve vzorci můžeme psát $v = at$.

Odvození dopadlo přesně tak, jak jsme očekávali: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v = at \Rightarrow$ dokonale přesným

výpočtem změny dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu $y = \frac{1}{2}at^2$ jsme získali funkci

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v = at$, která udává pro libovolný okamžik vztah pro okamžitou rychlost tohoto

pohybu \Rightarrow naše úvahy byly správné, výraz $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ určuje s nekonečnou přesností míru změny (dále už budeme říkat pouze změnu) funkce (případně směrnici tečny jejího grafu) v bodě x_0 .

Shrnutí:

Chceme vědět, jakým způsobem se mění hodnoty funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 :

- přibližná hodnota změny $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$,
- přesnost výpočtu se bude zvětšovat, když se Δx bude zmenšovat \Rightarrow nekonečně přesný výsledek: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$ **derivace funkce f v bodě x_0** .

Definice:

Je dána funkce f definovaná v jistém okolí bodu x_0 . Existuje-li vlastní limita

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ **nazýváme ji derivací funkce f v bodě x_0 a značíme ji symbolem $f'(x_0)$.**

Derivováním funkce $f(x)$ získáme funkci $f'(x)$ jejíž hodnoty v každém bodě x_0 udávají:

- změnu původní funkce $f(x)$ v bodě x_0 ,
- směrnici tečny grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 .

Derivace je speciálním případem limity.

Derivování funkcí je matematickým nástrojem, který umožňuje zachytit jeden ze základních fyzikálních vztahů mezi veličinami (jedna veličina je úměrná změně jiné veličiny) a proto byl objev derivování jednou z podmínek velkého rozvoje fyziky na konci sedmnáctého století.

Shrnutí: Derivace funkce $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ udává změnu hodnot funkce v bodě x_0 .