

10.2.8 Derivace složené funkce II

Předpoklady: 2914, 10207

K tomu, abychom uměli derivovat cokoliv nám schází ještě vzorce pro derivaci několika posledních elementárních funkcí:

Pro funkci $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, **platí** $y' = e^x$. (To už víme od druháku, kvůli tomu jsme přirozenou exponenciální funkci zaváděli).

Pro funkci $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ **platí** $y' = a^x \cdot \ln a$.

Pro funkci $y = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$, **platí** $y' = \frac{1}{x}$.

Pro funkci $y = \log_a x$, $x \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ **platí** $y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

Dodatek: Můžeme si všimnout několika věcí:

Přirozený logaritmus má (podobně jako přirozená exponenciální funkce) nejjednodušší derivaci ze všech logaritmických funkcí.

Při derivování mocninných funkcí x^n získáváme jako výsledky opět mocninné funkce $n \cdot x^{n-1}$. Jedinou mocninou funkcí, kterou nezískáme jako výsledek derivování jiné mocninné funkce je funkce $y = \frac{1}{x}$, která je derivací logaritmu.

Př. 1: Urči derivace:

a) $(x^2 + 2e^x)'$ b) $(x^3 + 2^x)'$ c) $(x - 2 \ln x)'$ d) $(\sqrt{x} + \ln 2 \cdot \log_2 x)'$

a) $(x^2 + 2e^x)' = 2x + 2e^x$

b) $(x^3 + 2^x)' = 3x^2 + 2^x \cdot \ln 2$

c) $(x - 2 \ln x)' = 1 - 2 \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{x}$

d) $(\sqrt{x} + \ln 2 \cdot \log_2 x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln 2 \cdot \frac{1}{x \ln 2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

Př. 2: Urči derivace:

a) $(x^2 e^x)'$ b) $(x \cdot \log_2 x)'$ c) $(\ln^2 x)'$ d) $(2^{\sin x})'$

a) $(x^2 e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 e^x$

b) $(x \cdot \log_2 x)' = 1 \cdot \log_2 x + x \cdot \frac{1}{x \ln 2} = \log_2 x + \frac{1}{\ln 2}$

c) $(\ln^2 x)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$

$$d) (2^{\sin x})' = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot (\sin x)' = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x$$

Funkce mohou být složené i vícenásobně: $\ln(\sin x^2)$: $\begin{matrix} x^2 & \sin z & \ln v \\ x \rightarrow z & \rightarrow v & \rightarrow y \end{matrix}$. Derivujeme stejně

jako funkce složené jednoduše:

$$\begin{aligned} \underbrace{\left[\ln(\sin x^2) \right]'}_{(\ln z)' = \frac{1}{z} \cdot z'} &= \frac{1}{\sin x^2} (\sin x^2)' = \frac{1}{\sin x^2} \underbrace{(\sin x^2)'}_{(\sin z)' = \cos z \cdot z'} = \frac{1}{\sin x^2} \cos x^2 (x^2)' = \\ &= \frac{\cos x^2}{\sin x^2} 2x = 2x \cdot \cotg x^2 \end{aligned}$$

Př. 3: Urči derivace:

a) $\left[\sin(e^{5x}) \right]'$

b) $\left[2^{\cos(x^2+2x)} \right]'$

c) $\left[e^{\sin^2 x} \right]'$

$$a) \underbrace{\left[\sin(e^{5x}) \right]'}_{(\sin z)' = \cos z \cdot z'} = \cos(e^{5x}) (e^{5x})' = \cos(e^{5x}) \underbrace{(e^{5x})'}_{(e^z)' = e^z \cdot z'} = \cos(e^{5x}) e^{5x} (5x)' = \cos(e^{5x}) e^{5x} \cdot 5$$

$$\underbrace{\left[2^{\cos(x^2+2x)} \right]'}_{(2^z)' = 2^z \cdot \ln z \cdot z'} = 2^{\cos(x^2+2x)} \cdot \ln 2 \cdot \left[\cos(x^2+2x) \right]' =$$

$$b) = 2^{\cos(x^2+2x)} \cdot \ln 2 \cdot \underbrace{\left[\cos(x^2+2x) \right]'}_{(\cos z)' = -\sin z \cdot z'} = 2^{\cos(x^2+2x)} \cdot \ln 2 \cdot \left[-\sin(x^2+2x) \right] (x^2+2x)' =$$

$$= -2^{\cos(x^2+2x)} \cdot \ln 2 \cdot \sin(x^2+2x) \cdot (2x+2)$$

$$c) \underbrace{\left[e^{\sin^2 x} \right]'}_{(e^z)' = e^z \cdot z'} = e^{\sin^2 x} \cdot \underbrace{(\sin^2 x)'}_{(z^2)' = 2z \cdot z'} = e^{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot (\sin x)' = e^{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x$$

V některých příkladech nejsou jsou některé z funkcí poznat hůře:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sin x^2} \right)'}_{(z^{-1})' = -\frac{1}{z^2} \cdot z'} = -\frac{1}{\sin^2 x^2} (\sin x^2)' = -\frac{1}{\sin^2 x^2} \underbrace{(\sin x^2)'}_{(\sin z)' = \cos z \cdot z'} = -\frac{1}{\sin^2 x^2} \cos x^2 (x^2)' = -\frac{\cos x^2 \cdot 2x}{\sin^2 x^2}$$

Př. 4: Urči derivace:

a) $\left(\sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 2x)}\right)'$ b) $\left[(\sin^2 x^2 + x^3)^2\right]'$ c) $\left[\sin^3(x^2 - 1)\right]'$

a)

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 2x)}\right)' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 2x)}} \left[\operatorname{tg}(x^2 + 2x)\right]' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 2x)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2 + 2x)} (x^2 + 2x)' = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 2x)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2 + 2x)} (2x + 2) = \frac{2x + 2}{2 \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 2x)} \cdot \cos^2(x^2 + 2x)} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \left[(\sin^2 x^2 + x^3)^2\right]' &= 2(\sin^2 x^2 + x^3)^1 \cdot (\sin^2 x^2 + x^3)' = 2(\sin^2 x^2 + x^3)^1 \left[2 \sin x^2 (\sin x^2)' + 3x^2\right] = \\ &= 2(\sin^2 x^2 + x^3)^1 (2 \sin x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x + 3x^2) \end{aligned}$$

c) $\left[\sin^3(x^2 - 1)\right]' = 3 \sin^2(x^2 - 1) \cdot \left[\sin(x^2 - 1)\right]' = 3 \sin^2(x^2 - 1) \cdot \cos(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)' =$
 $= 3 \sin^2(x^2 - 1) \cdot \cos(x^2 - 1) \cdot 2x$

Ještě horší situace nastane, když se derivace složené funkce setká se součinem nebo podílem:

Př. 5: Urči derivace:

a) $\left[\sin(x^2 \cdot \cos x)\right]'$ b) $\left(\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x + 3}}\right)'$

a) $\left[\sin(x^2 \cdot \cos x)\right]' = \cos(x^2 \cdot \cos x) (x^2 \cdot \cos x)' = \cos(x^2 \cdot \cos x) (2x \cdot \cos x - x^2 \sin x)$

b) $\left(\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x + 3}}\right)' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x + 3}{x^2 + 1}} \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x + 3}\right)' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x + 3}{x^2 + 1}} \cdot \frac{2x(x + 3) - (x^2 + 1) \cdot 1}{(x + 3)^2}$

Př. 6: Petáková:

strana 155/cvičení 19 f_9, f_{10}

strana 156/cvičení 22 f_5, f_{11}, f_{16}

Shrnutí: