10.2.10 Průběh funkce I (monotónnost)

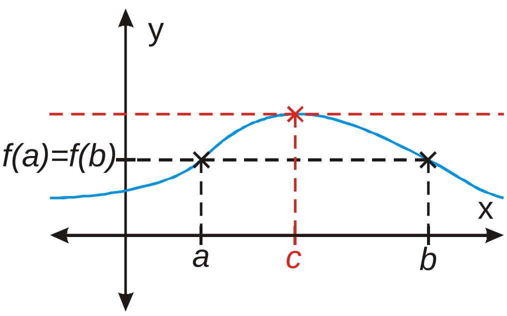
Předpoklady: 10202, 10209

Pedagogická poznámka: Tato hodina je značně obsáhlá, tak je nutné buď přenechat poslední příklad na příští hodinu, nebo se příliš nezdržovat úvodní částí.

V této a několika následujících hodinách se budeme zabývat průběhem funkce a tím, co vše se o něm dá pomocí derivací zjistit. Na začátek se seznámíme se dvěma větami, jejichž důležitost poznáme pouze částečně.

Rolleova věta:
Mějme funkci *f*, která má tyto vlastnosti:
a) je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a;b\rangle$
b) v každém bodě otevřeného intervalu $(a;b)$ má derivaci
c) $f(a)=f(b)$
Potom existuje v otevřeném intervalu $(a;b)$ aspoň jeden bod *c*, pro který platí $f'(c)=0$.

Př. 1: Nakresli obrázek libovolné funkce, která splňuje předpoklady Rolleovy věty. Do obrázku vyznač bod *c*.



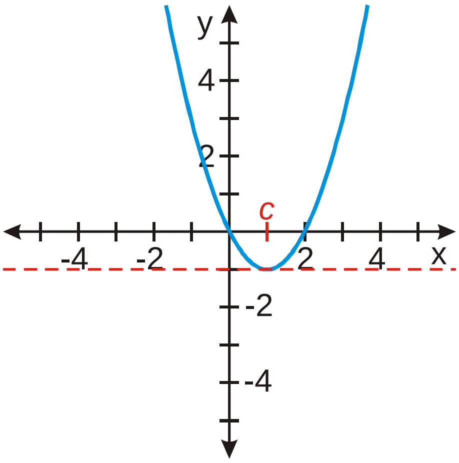
Funkce má mít v bodě *c* nulovou derivaci $\Rightarrow$ tečna v tomto bodě musí být rovnoběžná s osou *x*, funkce nesmí v bodě ani růst ani klesat

Pedagogická poznámka: Můžete nechat studenty, aby zkusili nakreslit funkci, která splňuje podmínky věty a nemá nikde nulovou derivaci.

Př. 2: Ověř platnost Rolleovy věty pro funkce:
a) $y=x^2-2x$, $x\in\langle -1;3\rangle$
b) $y=|x|$, $x\in\langle -1;1\rangle$

a) $y=x^2-2x$, $x\in\langle -1;3\rangle$
spojitost – ano, jde o polynomickou funkci
existence derivace: $(x^2-2)'=2x-2$ $\Rightarrow$ existuje pro každé $x\in\langle -1;3\rangle$
$f(-1)=(-1)^2-2(-1)=3$ $\quad f(3)=3^2-2\cdot 3=3$ $\Rightarrow$ $f(a)=f(b)$
$\Rightarrow$ předpoklady platí $\Rightarrow$ musí existovat bod s nulovou derivací:

$y' = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$



Jde o graf funkce $y = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$

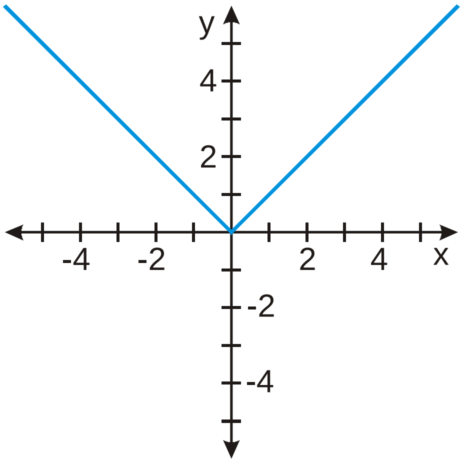
b) $y = |x|$, $x \in \langle -1;1 \rangle$

spojitost – ano

existence derivace: funkce $y = |x|$ má špičku $\Rightarrow$ pro $x = 0$ derivace neexistuje

$f(-1) = |-1| = 1 \qquad f(1) = |1| = 1 \Rightarrow f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ předpoklady neplatí $\Rightarrow$ nemusí existovat bod s nulovou derivací:
z obrázku je zřejmé, že neexistuje



Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je dobrým místem na zdůraznění toho, derivace neexistuje tam, kde má funkce „ostré hrany“.

Lagrangeova věta o střední hodnotě:
Mějme funkci *f*, která má tyto vlastnosti:

a) je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a;b \rangle$

b) v každém bodě otevřeného intervalu $(a;b)$ má derivaci

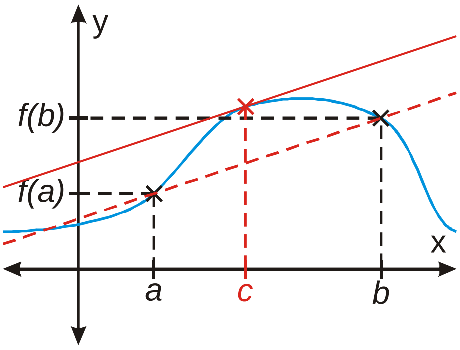
Potom existuje v otevřeném intervalu $(a;b)$ aspoň jeden bod *c*, pro který platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} ..$$

Př. 3: Jaký je vztah mezi Rolleovou a Lagrangeovou větou?

Rolleova věta obsahuje v předpokladech navíc podmínku $f(a)=f(b)$. Pokud by hodnoty funkce v bodech *a*, *b* byly stejné, platilo by $f(b)-f(a)=0$ a pro hodnotu derivace bychom dostali $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{0}{b-a}=0$ $\Rightarrow$ pro $f(b)=f(a)$ přechází Lagrangeova věta ve větu Rolleovu $\Rightarrow$ Rolleova věta je speciální případ věty Lagrangeovy

Př. 4: Nakresli obrázek libovolné funkce, která splňuje předpoklady Lagrangeovy věty (a nesplňuje předpoklady věty Rolleovy). Do obrázku vyznač bod *c*.



Tečna grafu funkce má v bodě *c* stejný směr jako přímka daná body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$.

Kromě geometrické interpretace z předchozího příkladu můžeme Lagrangeovu větu interpretovat i fyzikálně (na mnoha různých případech). Na příklad u pohybu můžeme postupovat takto:

$y=s(t)$ - závislost dráhy na čase $\Rightarrow$ místo *a*, *b* píšeme t_1, t_2, místo $f(b)$, $f(a)$ píšeme $s(t_2)$, $s(t_1)$ $\Rightarrow$ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\overline{v}$ = pomocí hodnot v krajních bodech jsme určili průměrnou rychlost.

okamžitá rychlost: $f'(c)=\frac{ds}{dt}(c)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\overline{v}$

$\Rightarrow$ v některém z okamžiků se okamžitá rychlost rovná průměrné rychlosti.

Ve skutečnosti je Lagrangeova věta užitečnější než se nám teď zdá.

Př. 5: (BONUS) Dokaž sporem pomocí Lagrangeovy věty větu: Platí-li $f'(x)=0$ pro každé $x\in(a;b)$, potom je *f* konstantní funkce.

Předpokládáme, že platí $f'(x)=0$ a zároveň funkce $f(x)$ není konstantní. Pokud funkce není konstantní musí v intervalu $(a;b)$ existovat čísla x_1, x_2 jejichž hodnoty nejsou stejné $f(x_1)\neq f(x_2)$. Z těchto bodů sestavíme kraje nového intervalu $\langle x_1;x_2\rangle$, ve kterém podle Lagrangeovy věty existuje bod x pro který platí $f'(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\neq 0$. Což už je rozpor s předpokladem.

Monotónnost funkce a derivace
monotónnost = zda je funkce rostoucí nebo klesající. Místo zadání: „Urči, kdy je funkce rostoucí nebo klesající“, budeme řešit příklady „Urči monotónnost funkce“.

Př. 6: Zformuluj vztah mezi monotónností funkce v intervalu $(a;b)$ a hodnotami její derivace v tomto intervalu.

Na grafech jsme si to již ukazovali mnohokrát:

Má-li funkce *f* v každém bodě intervalu $(a;b)$ kladnou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí.
Má-li funkce *f* v každém bodě intervalu $(a;b)$ zápornou derivaci, je v tomto intervalu klesající.

Pedagogická poznámka: Část studentů si to určitě bude pamatovat, té druhé napíšu na tabuli vztah pro derivaci funkce v bodě a ukážeme si, jak musí funkce vypadat, aby ze vztahu vypadlo kladné nebo záporné číslo. Blíže v hodině10202.

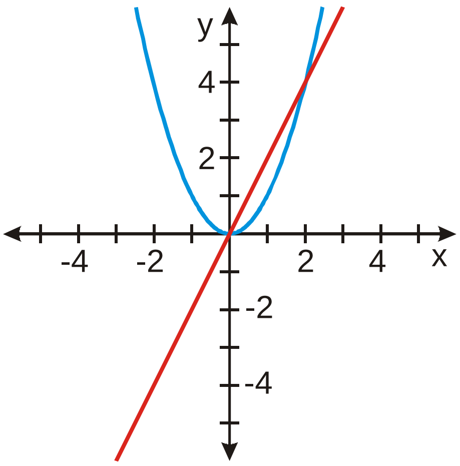
Př. 7: Dokumentuj vztah mezi monotónností funkce a hodnotami její derivace na funkcích:

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = \frac{1}{x}$

Pro každou funkci jsou v jednom obrázku nakresleny dva grafy:

- modře graf funkce
- červeně graf její derivace

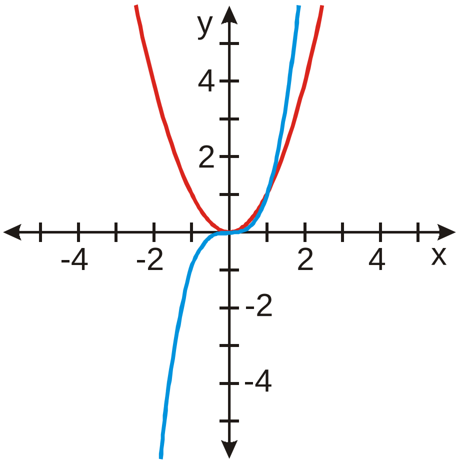
a) $y = x^2$



Funkce $y = x^2$ je rostoucí v intervalu $\langle 0;\infty)$
V intervalu $\langle 0;\infty)$ jsou hodnoty derivace (funkce $y = 2x$) kladné

Funkce $y = x^2$ je klesající v intervalu $(-\infty;0\rangle$
V intervalu $(-\infty;0\rangle$ jsou hodnoty derivace (funkce $y = 2x$) záporné

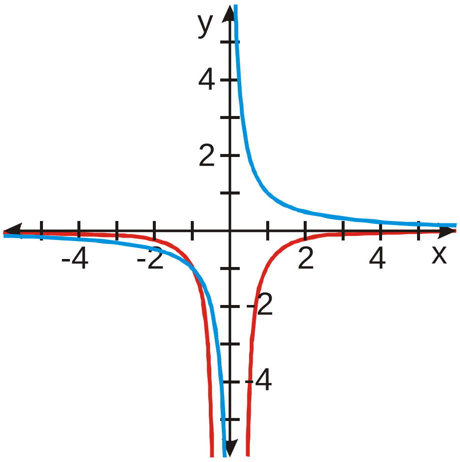
b) $y = x^3$



Funkce $y = x^3$ je rostoucí v R

Hodnoty derivace (funkce $y = 3x^2$) jsou kladné

c) $y = \frac{1}{x}$



Funkce $y = \frac{1}{x}$ je klesající v intervalech $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

Hodnoty derivace (funkce $y = -\frac{1}{x^2}$) jsou v obou těchto intervalech záporné.

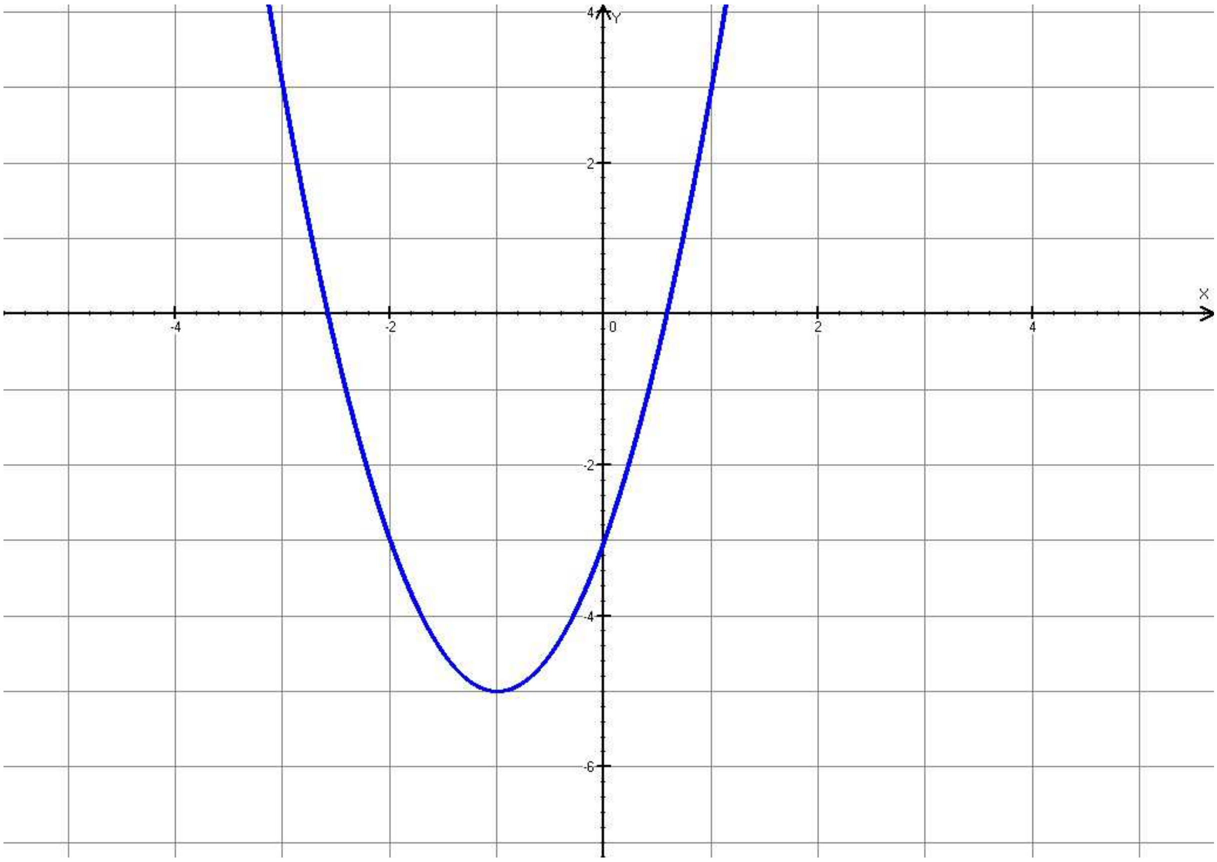
Př. 8: Urči intervaly monotónnosti funkcí:

a) $y = 2x^2 + 4x - 3$ b) $y = x^3 - 3x$

a) $y = 2x^2 + 4x - 3$

$y' = 4x + 4$, řešíme nerovnici $4x + 4 > 0$

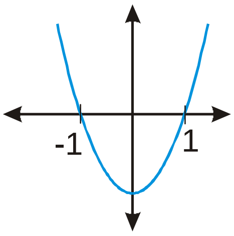
$x > -1 \Rightarrow$ pro $x \in (-1; \infty)$ derivace funkce $y = 4x + 4$ je kladná a funkce $y = 2x^2 + 4x - 3$ je rostoucí, kontrolou je třeba graf



b) $y = x^3 - 3x$

$y' = 3x^2 - 3$, řešíme nerovnici $3x^2 - 3 > 0 \;\; / : 3$ $\qquad\qquad x^2 - 1 > 0$

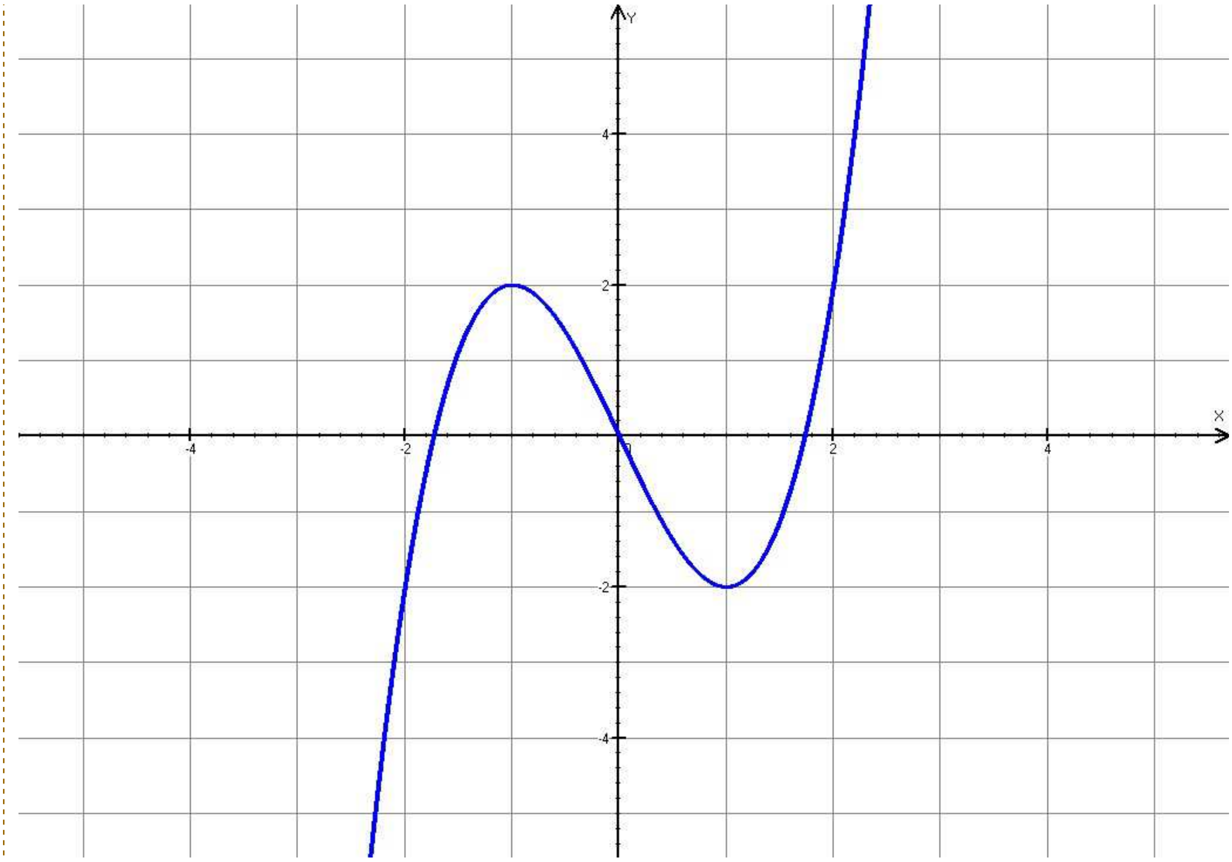
nulové body: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1,\; x_2 = -1$, před x^2 je + $\Rightarrow$ grafem je "ďolík"



$x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \quad 3x^2 - 3 = y' > 0 \;\Rightarrow\;$ funkce $y = x^3 - 3x$ je rostoucí

$x \in (-1; 1) \quad 3x^2 - 3 = y' < 0 \;\Rightarrow\;$ funkce $y = x^3 - 3x$ je klesající

Opět můžeme výsledek zkonrolovat pomocí grafu



Př. 9: Petáková:
strana 157/cvičení 38 f_1, f_5
strana 158/cvičení 39 g_1, g_4, g_5, g_{10}

Shrnutí: Podle znaménka derivace poznáme, zda je funkce rostoucí nebo klesající.