10.2.13 Vyšetřování průběhu funkce

Předpoklady: 10212

Pedagogická poznámka: Začneme tím, že si studenti opíší níže uvedený seznam deseti bodů, podle kterých průběh funkce určujeme. Pak začneme řešit první příklad, který kontrolujeme společně po jednotlivých bodech. Zanesení informací do grafu a nakreslení křivky pak děláme společně.
Další příklady dělají studenti samostatně. Zbývá jim však jenom několik minut, takže pokud si mají látku ve škole opravdu procvičit je nutné jí věnovat ještě jednu hodinu.
Je třeba tlačit na studenty, aby zápis do sešitu dělali pořádně, informací, které mají postupně získat je hodně a musí je zapsat tak, aby je na konci příkladu při kreslení grafu našli.
Největší problém při práci pak samozřejmě není derivování, ale řešení rovnic a nerovnic.

Všechno co potřebujeme na určování průběhu funkce už umíme. Abychom na nic nezapomněli, sepíšeme si, co všechno musíme udělat, abychom mohli nakreslit co nejpřesnější graf:

1. Definiční obor, lichost, sudost, periodicita
2. Body, ve kterých není funkce definována, jednostranné limity, limity v nevlastních bodech, intervaly spojitosti.
3. Průsečíky grafu s osami x a y, znaménka funkčních hodnot
4. Výpočet 1. derivace, nulové body 1. derivace, a body, ve kterých neexistuje 1. derivace
5. Lokální extrémy, intervaly monotónnosti
6. Výpočet 2. derivace, nulové body 2. derivace, a body, ve kterých neexistuje 2. derivace
7. Inflexní body, intervaly konvexnosti a konkávnosti
8. Asymptoty
9. Graf funkce
10. Obor hodnot

Jako první si zkusíme funkci, kterou již v podstatě známe $y = 3x^4 - 4x^3$.

Př. 1: Vyšetři průběh funkce $y = 3x^4 - 4x^3$.

Budeme postupovat podle bodů:
1. Funkce $y = 3x^4 - 4x^3$ je polynomická funkce $\Rightarrow$ $D(f) = R$
obsahuje sudé i liché mocniny $\Rightarrow$ není ani sudá ani lichá, není periodická
2. $D(f) = R$ $\Rightarrow$ funkce nemá jednostranné limity ve vlastních bodech, je spojitá v R

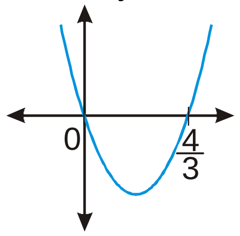
$$\lim_{x\to\infty} 3x^4 - 4x^3 = \lim_{x\to\infty} x^4\left(3 - 4\frac{1}{x}\right) = +\infty(3-0) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^4 - 4x^3 = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(3 - 4\frac{1}{x}\right) = +\infty(3-0) = +\infty$$

3. průsečíkem s osou *y* je hodnota $f(0) = 3 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0$

průsečík s osou *x* body, kde platí $y = 0 \Rightarrow$ řešíme rovnici: $3x^4 - 4x^3 = x^3(3x-4) = 0 \Rightarrow$ dva nulové body $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3} \Rightarrow$ **body grafu na ose *x*:** $[0;0]$, $\left[\frac{4}{3};0\right]$

znaménka funkčních hodnot $\Rightarrow$ řešíme nerovnici: $3x^4 - 4x^3 = x^2 \cdot x(3x-4) > 0$, člen $x^2 \geq 0$ $\Rightarrow$ můžeme ho vynechat $\Rightarrow$ řešíme nerovnici $3x^2 - 4x > 0$, před x^2 je kladné číslo $\Rightarrow$



„ďolík“ $\Rightarrow$

pro $x \in (-\infty;0) \cup \left(\frac{4}{3};\infty\right)$ je funkce kladná, pro $x \in \left(0;\frac{4}{3}\right)$ je funkce záporná

4. první derivace: $y' = \left(3x^4 - 4x^3\right)' = 12x^3 - 12x^2$

nulové body první derivace: $12x^2(x-1) = 0 \Rightarrow$ dva nulové body: $x_1 = 0$, $x_3 = 1$

5. znaménko první derivace $\Rightarrow$: $12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$, člen $x^2 \geq 0 \Rightarrow$ můžeme ho vynechat $\Rightarrow$ řešíme nerovnici $(x-1) > 0 \Rightarrow$

$x \in (-\infty;1)$: $y' < 0 \Rightarrow$ funkce klesá, $x \in (1;\infty)$: $y' > 0 \Rightarrow$ funkce roste

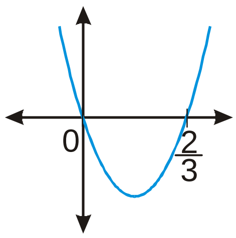
$\Rightarrow$ v bodě $x_1 = 0$ není extrém, v bodě $x_3 = 1$ je minimum (znaménko se mění z – na +)

hodnota minima $f(1) = 3 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 = -1 \Rightarrow$ **minimum v bodě** $[1;-1]$

6. druhá derivace: $y'' = \left(12x^3 - 12x^2\right)' = 36x^2 - 24x$

nulové body druhé derivace: $12x(3x-2) = 0 \Rightarrow$ dva nulové body: $x_1 = 0$, $x_4 = \frac{2}{3}$

7. znaménko druhé derivace $\Rightarrow$: $36x^2 - 24x > 0$, před x^2 je kladné číslo $\Rightarrow$ „ďolík“



pro $x \in (-\infty;0) \cup \left(\frac{2}{3};\infty\right)$ je konvexní, pro $x \in \left(0;\frac{2}{3}\right)$ je funkce konkávní

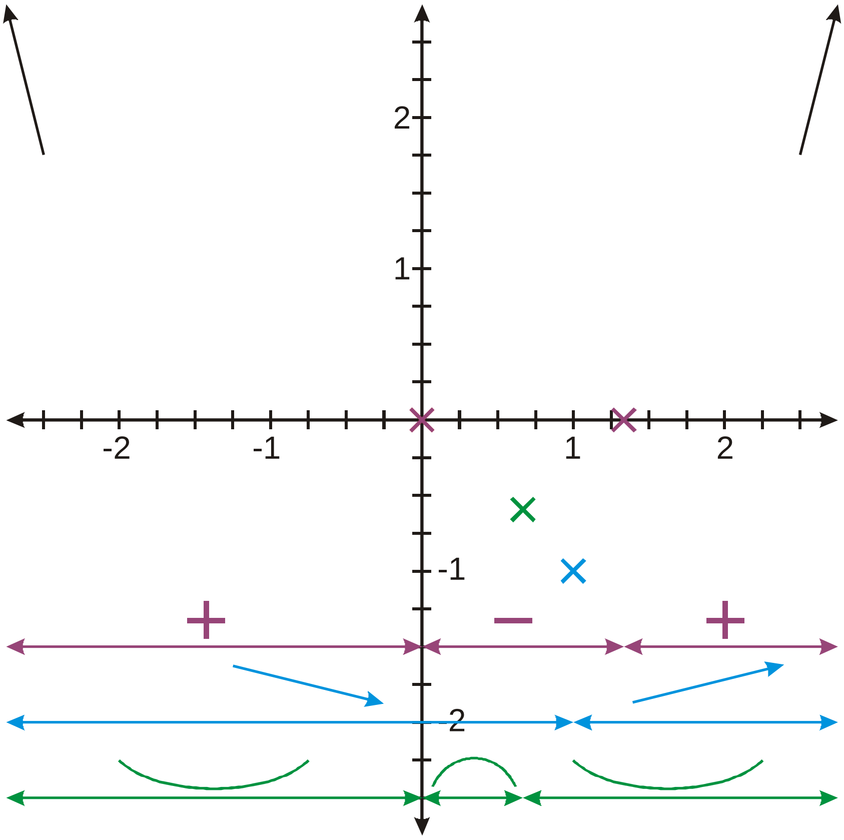
bod $x = 0$ je inflexní , bod $x = \frac{2}{3}$ je inflexní hodnota v inflexním bodě

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{16}{27} \Rightarrow$ **inflexní bod:** $\left[\frac{2}{3};-\frac{16}{27}\right]$

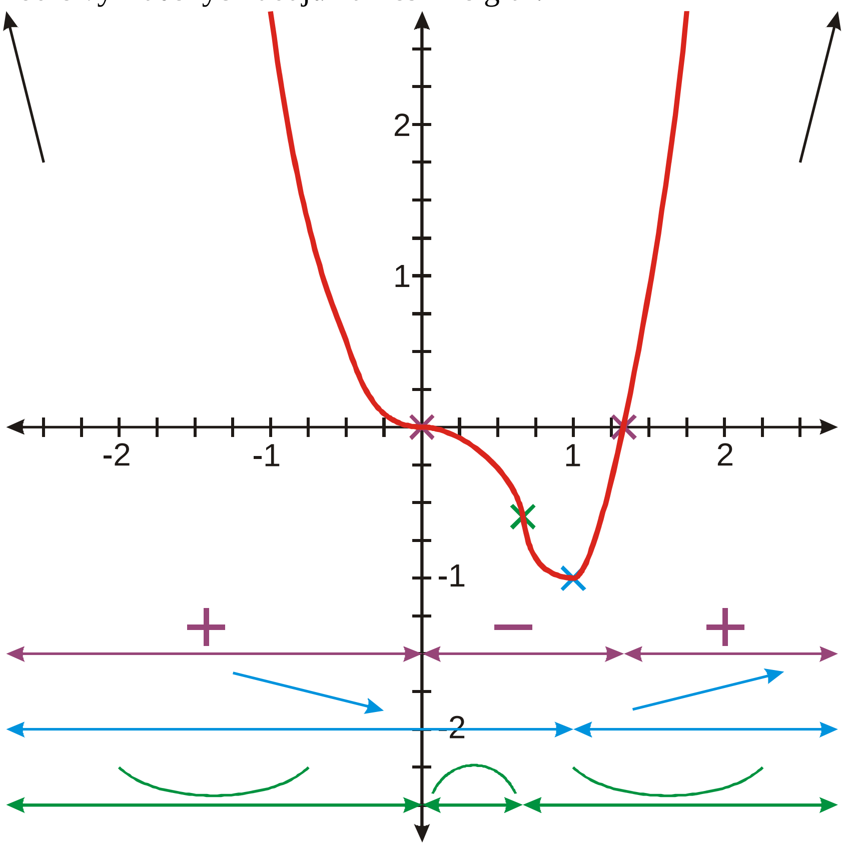
8. hledáme asymptoty: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 4x^3}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 3x^3 - 4x^2 = \lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(3 - 4\frac{1}{x}\right) = +\infty(3-0) = +\infty \Rightarrow$

funkce nemá asymptoty

9. do grafu vyneseme všechny spočtené body, zakreslíme si všechny údaje:

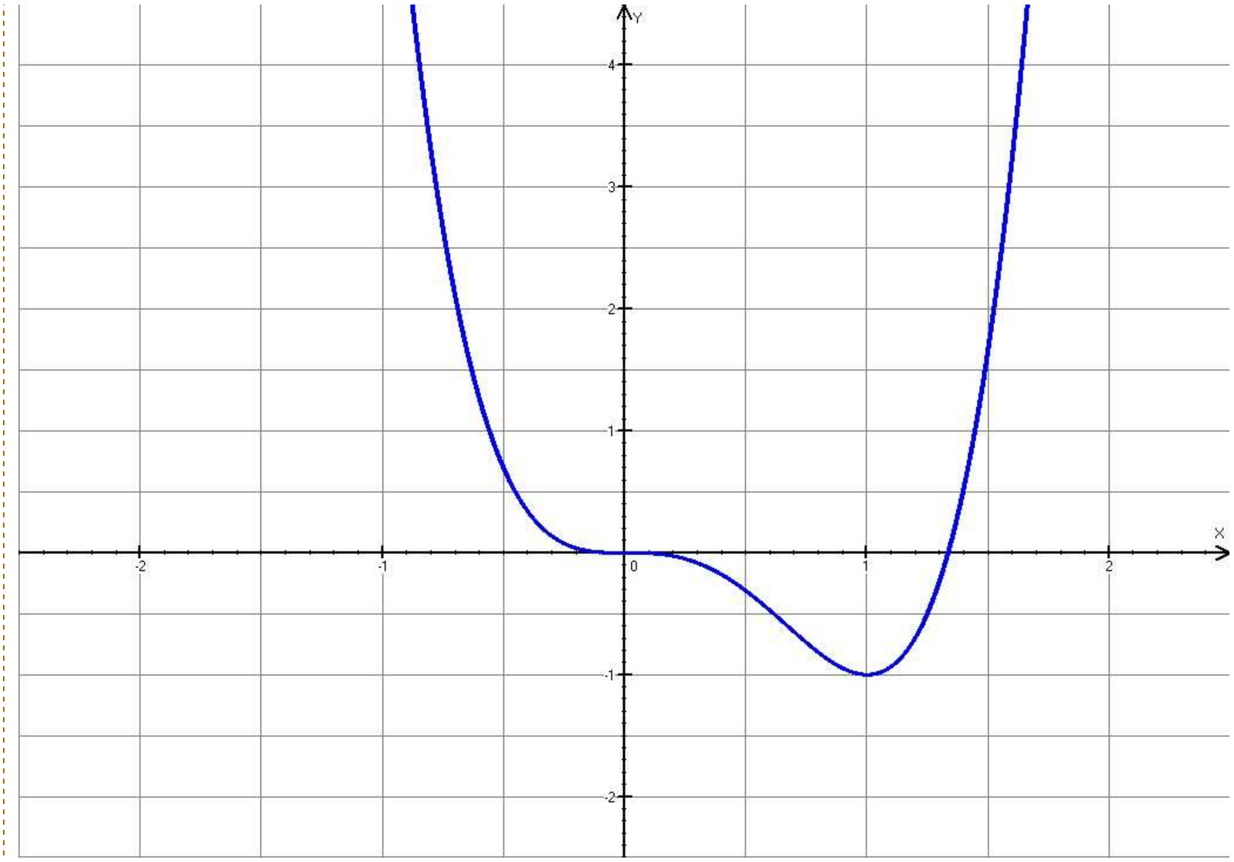


Podle vyznačených údajů nakreslíme graf:



10. Z obrázku vidíme, že platí: $H(f) = \langle -1; \infty)$

Výsledek si můžeme zkontrolovat pomocí počítače:



Př. 2: Vyšetři průběh funkce $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Př. 3: Vyšetři průběh funkce $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

Př. 4: Vyšetři průběh funkce $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

Př. 5: Petáková:
strana 159/cvičení 52 f_7, f_9
strana 159/cvičení 54 h_1, h_7
strana 159/cvičení 55 g_2, g_3

Shrnutí: