

10.2.14 Užití derivace

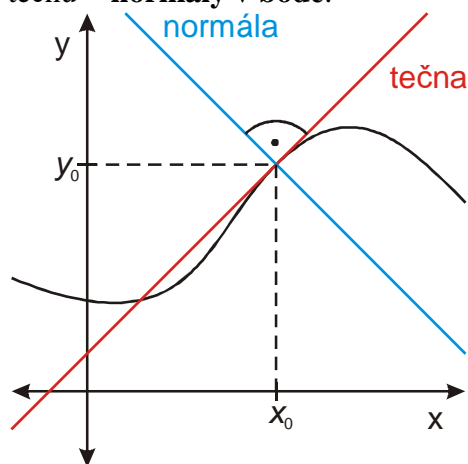
Předpoklady: 10202, 10209

Pedagogická poznámka: Hodinu dělíme na dvě poloviny – jednu na tečny a normály, druhou na L'Hospitalova pravidla.

Už při zavádění derivace, jsme si ukázali, že hodnota derivace v bodě je zároveň hodnotou směrnice tečny grafu funkce v tomto bodě:

⇒ grafu funkce má v bodě $[x_0; y_0]$ tečnu danou rovnicí: $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (pokud derivace v tomto bodě existuje).

Kromě tečny (která zachycuje směr grafu v bodě) je nutné určovat i rovnice přímky kolmé na tečnu = **normály v bodě**.



Její rovnice bude mít opět tvar $(y - y_0) = k'(x - x_0)$.

V analytické geometrii jsme si ukázali, že pro směrnice dvou navzájem kolmých přímek platí:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Př. 1: Napiš obecný vzorec pro rovnici normály v bodě $[x_0; y_0]$. Předpokládej, že funkce má v tomto bodě derivaci.

Pro směrnici normály platí: $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$

Dosadíme do obecného tvaru směrnice rovnice přímky: $(y - y_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Př. 2: Urči rovnici tečny grafu funkce $y = x^2$ v bodě $x_0 = 1$.

Hodnota funkce v bodě $x_0 = 1$: $y = x^2 = 1^2 = 1$

Derivace funkce: $y' = (x^2)' = 2x$

Hodnota derivace: $y' = 2x = 2 \cdot 1 = 2$

Dosazení do rovnice tečny: $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$(y - 1) = 2(x - 1)$$

Po úpravách: $y = 2x - 1$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je dobrým indikátorem toho, jestli mají studenti reálnou představu o tom, co vlastně dělají. Nejčastější chybou je totiž rovnice $(y - 1) = 2x(x - 1)$, která vznikne tím, že studenti místo hodnoty derivace v konkrétním bodě dosazují její funkční předpis. Což v tomto konkrétním případě znamená, že se z rovnice přímky stane parabola. Bavíme se o tom, že dosazení funkčního předpisu je zjevně nesmyslné, když do rovnice přímky potřebujeme sehnat konkrétní číslo a ne předpis funkce.

Př. 3: Urči rovnici tečny a normály grafu funkce $y = \frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = -1$. Nakresli obrázek situace.

Hodnota funkce v bodě $x_0 = -1$: $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

Derivace funkce: $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Hodnota derivace: $y' = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{(-1)^2} = -1$

Dosazení do rovnice tečny: $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

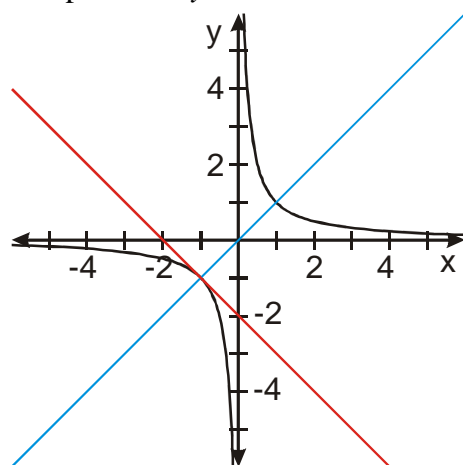
$$(y + 1) = -1(x + 1)$$

Po úpravách: $y = -x - 2$

Dosazení do rovnice normály: $(y - y_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

$$(y + 1) = -\frac{1}{(-1)}(x + 1)$$

Po úpravách: $y = x$



Rovnice získané výpočtem odpovídají přímkám, které jsme získali graficky

Př. 4: Najdi bod, ve kterém má tečna grafu funkce $y = \sqrt{x^2 + 1}$ směrnici 0,5. Urči rovnici normály v tomto bodě.

Zderivujeme funkci $y = \sqrt{x^2 + 1}$: $y' = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x$.

Tečna má mít směrnici 0,5 \Rightarrow derivace se rovná 0,5: $y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 0,5 \Rightarrow$ řešíme rovnici:

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 0,5 \quad / \cdot 2\sqrt{x^2 + 1}$$

$$2x = \sqrt{x^2 + 1} \quad / ^2$$

$$4x^2 = x^2 + 1$$

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Řešením rovnice je pouze číslo $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Pokud bychom dosadili do zlomku číslo $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, bude jeho hodnota záporná.

Funkční hodnota v bodě $\frac{\sqrt{3}}{3}$: $y = \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{3}{9} + 1} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ tečna i

normála prochází bodem $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

Dosazení do rovnice tečny: $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$\left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0,5 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Dosazení do rovnice normály: $(y - y_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

$$\left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{0,5} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -2 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Derivace mohou značně usnadnit výpočty některých limit:

L'Hospitalova pravidla:

- Necht' $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a necht' existuje vlastní nebo nevlastní $\frac{\lim_{x \rightarrow a} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g'(x)}$.

Potom existuje také $\frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ a platí $\frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g'(x)}$.

- Necht' $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ a necht' existuje vlastní nebo nevlastní $\frac{\lim_{x \rightarrow a} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g'(x)}$. Potom

existuje také $\frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ a platí $\frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g'(x)}$. (O $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nepředpokládáme

nic, ani existenci této limity).

Obě pravidla platí také pro limity v bodě zleva, zprava a limity v nevlastních bodech.

Př. 5: Vypočti pomocí L'Hospitalova pravidla $\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 2}$.

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)'}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2)'} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2x}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{3}$$

Pedagogická poznámka: Část studentů příklad samozřejmě nespočítá a proto si ho musíme spočítat i na tabuli, ale všichni by měli dostat šanci zkusit pochopit smysl předchozí věty sami.

Jak používáme L'Hospitalova pravidla?

Pokud při dosazení vyjde v limitě neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}$ zderivujeme samostatně čítelel a jmenovatel zlomku a zkusíme dosadit znova. Tento postup můžeme opakovat i vícekrát.

Př. 6: Vypočti limity

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 5x - 12}{x^2 - 2x - 8}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 5x - 12}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x^2 - 5x - 12)'}{(x^2 - 2x - 8)'} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x - 5}{2x - 2} = \frac{4 \cdot 4 - 5}{2 \cdot 4 - 2} = \frac{11}{6}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)'}{(\sqrt{x+2}-1)'} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \lim_{x \rightarrow -1} 2\sqrt{x+2} = 2\sqrt{(-1)+2} = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1-\sqrt{x-3})'}{(x^2-16)'} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-3}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 4} -\frac{1}{4x\sqrt{x-3}} = -\frac{1}{4 \cdot 4\sqrt{4-3}} = -\frac{1}{16}$

Př. 7: Vypočti limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \sin 3x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 3x \cdot 3}{1} = 6 \cos(3 \cdot 0) = 6$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x (-\sin x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-2 \cos x \sin x)'}{(2x)'} =$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2[(-\sin x) \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x]}{2} = \sin^2 0 - \cos^2 0 = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \operatorname{tg} x)'}{(\sin x - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x - (-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x + \sin x} =$

$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos^2 x (\cos x + \sin x)} = \frac{-1}{\cos^2 \frac{\pi}{4} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{-1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \frac{-1}{\frac{2}{4} \frac{2\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$

Př. 8: Vypočti limity:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^2}{x^3 + 3x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x + 2}{3 \log x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^2}{x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 4x}{3x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x - 4}{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{6} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x + 2}{3 \log x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x \ln 10}}{\frac{1}{x \ln 10}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln 10}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Př. 9: Vypočti limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$

V tomto stavu nemůžeme L'Hospitalovo pravidlo použít, v limitě není žádný podíl \Rightarrow musíme podíl vyrobit:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

Pedagogická poznámka: Protože studenti určitě nestihnou spočítat všechny příklady s limitami, na konci hodiny si ukážeme poslední příklad, který obsahuje trik, na který naprostá většina studentů sama nepřijde.

Př. 10: Petáková:

strana 156/cvičení 26 d) f)

strana 157/cvičení 27 b) f)

strana 157/cvičení 31

strana 161/cvičení 62 b) e) g) h)

Shrnutí: Použití derivace dělá z výpočtu některých limit mechanickou záležitost.