

10.3.2 Výpočet neurčitých integrálů I

Předpoklady: 10301

V minulé hodině jsme začali hledat primitivní funkce. Například k funkci $f(x) = 2x$ je primitivní funkcí funkce $F(x) = x^2 + C$, protože platí $F'(x) = f(x)$ konkrétně

$(x^2 + C)' = 2x$. Hledání primitivních funkcí nám usnadňovaly vzorce sestavené podle pravidel pro derivace:

derivace	$(C)' = 0$	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
integrace	$\int 0 dx = C$	$\int 1 dx = \int dx = x + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1, x \in (0; \infty)$

a vzorec pro integrování součtu: $\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx$

Př. 1: Vypočti:

$$\text{a) } \int \left(\frac{x^3}{6} - 2x^2 + \pi \right) dx \quad \text{b) } \int [(x+2)(x^2-1)] dx \quad \text{c) } \int \frac{x^5 - 3x + \sqrt{2}}{x^3} dx$$

$$\text{a) } \int \left(\frac{x^3}{6} - 2x^2 + \pi \right) dx = \int \frac{x^3}{6} dx + \int -2x^2 dx + \int \pi dx = \frac{x^4}{24} - \frac{2x^3}{3} + \pi x + C$$

$$\text{b) } \int [(x+2)(x^2-1)] dx = \int (x^3 + 2x^2 - x - 2) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

c)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - 3x + \sqrt{2}}{x^3} dx &= \int \left(\frac{x^5}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{\sqrt{2}}{x^3} \right) dx = \int (x^2 - 3x^{-2} + \sqrt{2}x^{-3}) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^{-1}}{-1} + \sqrt{2} \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x} - \frac{\sqrt{2}}{2x^2} + C \end{aligned}$$

Př. 2: Vypočti:

$$\text{a) } \int \sqrt{x} dx \quad \text{b) } \int x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x} \right) dx \quad \text{c) } \int \frac{x^2 - 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^3}} dx$$

$$\text{a) } \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

b)

$$\int x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x} \right) dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}} + x^2\sqrt{x} \right) dx = \int \left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{2}} \right) dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + C$$

$$\int \frac{x^2 - 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^3}} dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^3}} - \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-1} + x^{-\frac{3}{2}} \right) dx =$$

c)

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx - \int 3x^{-1} dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \int 3x^{-1} dx + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C - \int 3x^{-1} dx$$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu se samozřejmě opět opakují problémy s úpravou mocnin. Zajímavé také je, jak velkému množství studentů se podaří spočítat i $\int 3x^{-1} dx$ většinou takto $\int 3x^{-1} dx = 3x^0 = 3$. V takovém případě je samozřejmě na místě otázka, zda si výsledek alespoň v hlavě zkusili zderivovat.

Integrál $\int 3x^{-1} dx$ spočítat neumíme, vzorec $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ platí pouze pro $n \neq -1 \Rightarrow$ musíme najít další vzorce, podle dalších pravidel pro derivace elementárních funkcí. Která elementární funkce se derivuje na $\frac{1}{x}$?

Př. 3: Doplň tabulku neurčitých integrálů:

derivace	$(\ln x)' =$		$(e^x)' =$	$(a^x)' =$
integrace				

derivace	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
integrace	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ $x \in (0; \infty)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Teď už můžeme dopočítat předchozí příklad:

$$\int \frac{x^2 - 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int 3x^{-1} dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 3\ln x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

Př. 4: Vypočti:

$$\text{a) } \int \left(e^x - \frac{2}{x} + 2^x \right) dx \quad \text{b) } \int \left(\frac{3x^2 - x}{2x^3} + e + 2^x \right) dx \quad \text{c) } \int \left(\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{\ln 3}{x} + \ln 3 \right) dx$$

$$\text{a) } \int \left(e^x - \frac{2}{x} + 2^x \right) dx = \int e^x dx - \int \frac{2}{x} dx + \int 2^x dx = e^x - 2 \ln x + \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$\text{b) } \int \left(\frac{3x^2 - x}{2x^3} + e + 2^x \right) dx = \int \left(\frac{3x^2}{2x^3} - \frac{x}{2x^3} + e + 2^x \right) dx = \int \frac{3}{2x} dx - \int \frac{1}{2x^2} dx + \int e dx + \int 2^x dx =$$

$$= \frac{3}{2} \ln x - \frac{1}{2} (-1) x^{-1} + ex + \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{3}{2} \ln x + \frac{1}{2x} + ex + \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$\text{c) } \int \left(\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{\ln 3}{x} + \ln 3 \right) dx = \frac{1}{\ln 3} \int 3^x dx + \ln 3 \int \frac{1}{x} dx + \ln 3 \int dx = \frac{1}{\ln 3} \frac{3^x}{\ln 3} + \ln 3 \cdot \ln x + \ln 3 \cdot x + C =$$

$$= \frac{3^x}{\ln^2 3} + \ln 3 \cdot \ln x + x \cdot \ln 3 + C$$

Pedagogická poznámka: Až příliš mnoho studentů jaksí nepostřehne, že e^x je něco jiného

než x^n a integrují takto: $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$ (tedy pomocí vzorce

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C).$$

Zajímavé je také, jak si studenti poradí s $\int e dx = ex + C$.

Př. 5: Petáková:

strana 163/cvičení 81 f) i) m) q) t)

Shrnutí: Funkce $y = \frac{1}{x}$ se neintegruje podle vzorce pro mocniny, ale podle zvláštního

$$\text{vzorce } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$$