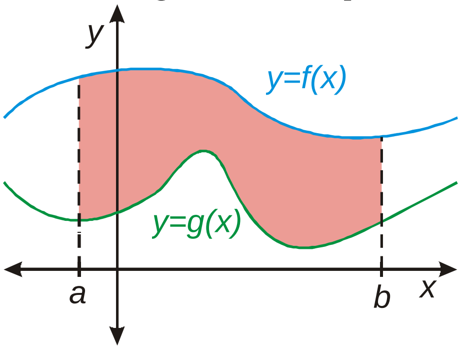
10.3.14 Výpočet plochy obrazce II

Předpoklady: 10313

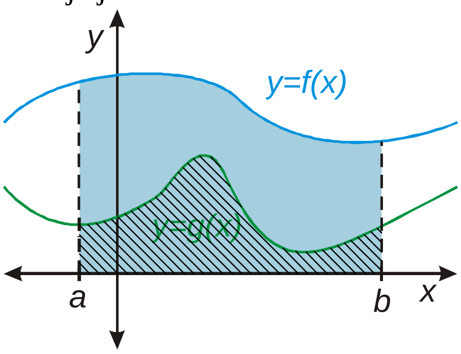
Pomocí integrálů můžeme počítat i obsahy ploch, které nejsou vůbec ohraničovány osou *x*.



Obsah červené plochy na obrázku určíme pomocí integrálu takto:

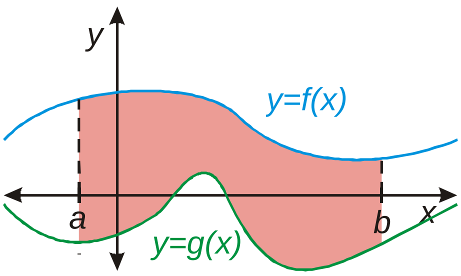
$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$.

Proč je jasné z obrázku:

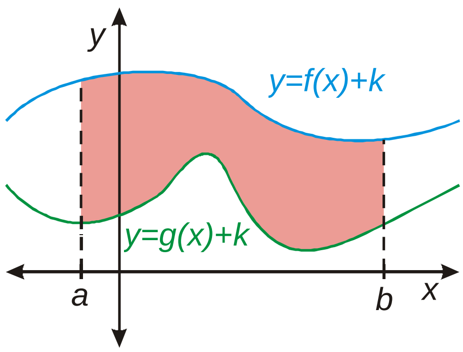


- Modrá plocha $S = \int_a^b f(x)\, dx$
- Šrafovaná plocha $S = \int_a^b g(x)\, dx$

Vzorec platí i v případě, že alespoň jedna z funkcí nabývá záporných hodnot, protože přičtením vhodné konstanty k oběma funkcím se plocha mezi křivkami nezmění, pouze se obrázek posune dostatečně nahoru

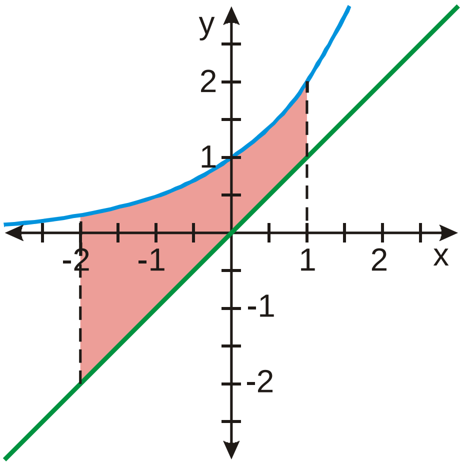


$\Rightarrow$



Př. 1: Urči obsah rovinného obrazce, který ohraničují křivky $y = 2^x$, $y = x$, $x = -2$, $x = 1$.

Nakreslíme si přibližné tvary grafů obou funkcí:

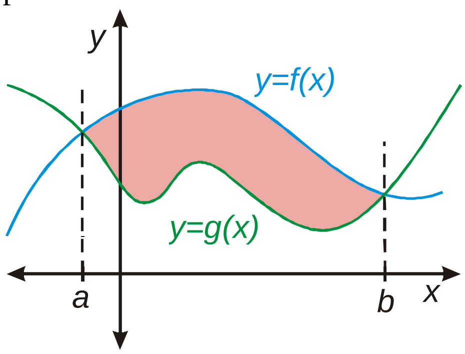


Obsah plochy:

$$S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_{-2}^{1}\left(2^x-x\right)dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-2}^{1}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}=\frac{1}{\ln 2}\left(2^1-2^{-2}\right)-\frac{1}{2}\left[1^2-(-2)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\left(2-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}(-3)=\frac{7}{4\ln 2}+\frac{3}{2}$$

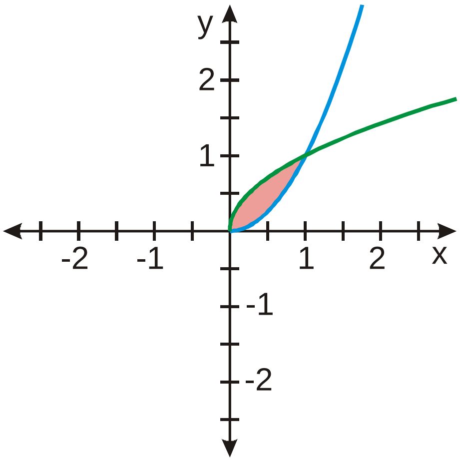
V mnoha případech se v zadání přímo neudávají meze, protože ohraničenou plochu omezuje přímo tvar křivek:



Př. 2: Urči obsah útvaru, který je ohraničen křivkami:
a) $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ b) $y=x^2-3$, $y=2x$

a) $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$

Obě funkce procházejí body $[0;0]$ a $[1;1]$.



$$S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^1-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{1^3}-\sqrt{0^3}\right)-\frac{1}{3}\left(1^3-0^3\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

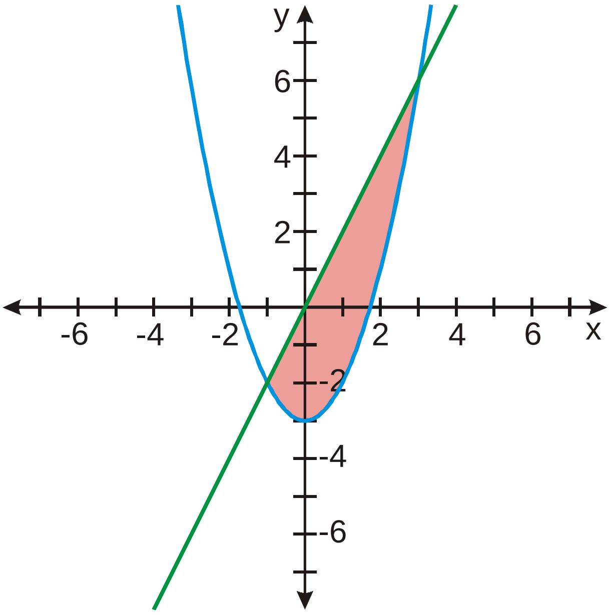
b) $y=x^2-3$, $y=2x$

Nejdříve určíme meze integrálu, tedy společné body grafů obou funkcí:

$x^2-3=2x$

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0 \ \Rightarrow\ x_1=-1,\ x_2=3$

$\Rightarrow$ oba grafy se protínají v bodech $[-1;-2]$ a $[3;6]$



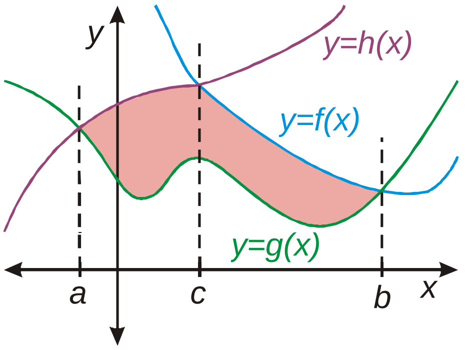
$$S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_{-1}^3\left[2x-\left(x^2-3\right)\right]dx=\int_{-1}^3\left(2x-x^2+3\right)dx=$$

$$=\left[2\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^3-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^3+\left[3x\right]_{-1}^3=\left[3^2-(-1)^2\right]-\left[\frac{3^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right]+\left[3\cdot 3-3(-1)\right]=$$

$$=(9-1)-\left(9+\frac{1}{3}\right)+(9+3)=\frac{32}{3}$$

Pokud je útvar ohraničen větším počtem křivek rozdělíme počítání integrálu na více částí podobně jako v minulé hodině, když křivka protínala osu *x* a části obrazce se vyskytovali střídavě nad i pod osou *x*.

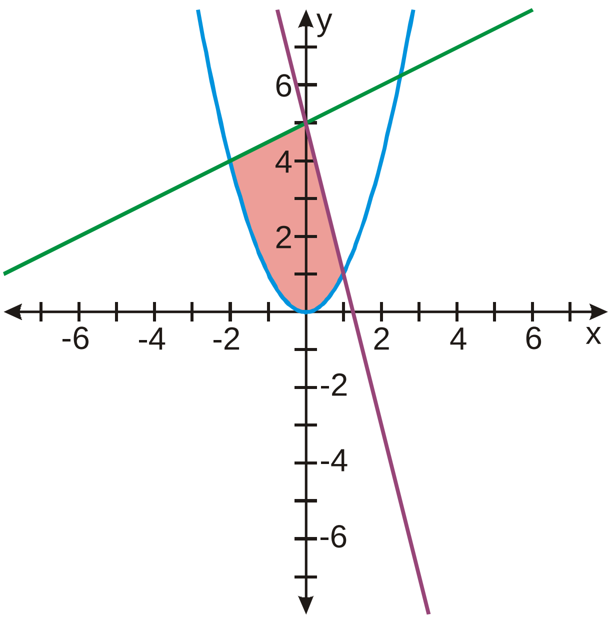
Př. 3: Zapiš obecný vztah pro výpočet plochy vyznačené na obrázku ohraničené funkcemi $y=f(x)$, $y=g(x)$ a $y=h(x)$.



$$S=\int_a^c\left[h(x)-g(x)\right]dx+\int_c^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

Př. 4: Vypočti obsah útvaru, který je zespodu ohraničen křivkou $y=x^2$ a seshora přímkami funkcí $y=0,5x+5$ a $y=-4x+5$.

Nakreslíme si obrázek situace:



Hledáme průsečíky:

funkce $y = x^2$ a $y = 0,5x + 5$ $\Rightarrow$ $x^2 = 0,5x + 5$

$2x^2 - x - 10 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 9}{4}$

$x_1 = \frac{1+9}{4} = \frac{5}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{1-9}{4} = -2$ - tento bod nás zajímá

funkce $y = x^2$ a $y = -4x + 5$ $\Rightarrow$ $x^2 = -4x + 5$

$x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1) = 0$

$x_1 = -5$ $\qquad$ $x_2 = 1$ - tento bod nás zajímá

$\Rightarrow$ pro obsah útvaru platí:

$$S = \int_{-2}^{0} \left[(0,5x+5) - x^2\right] dx + \int_0^1 \left[(5-4x) - x^2\right] dx = \int_{-2}^{0} \left(0,5x + 5 - x^2\right) dx + \int_0^1 \left(5 - 4x - x^2\right) dx =$$

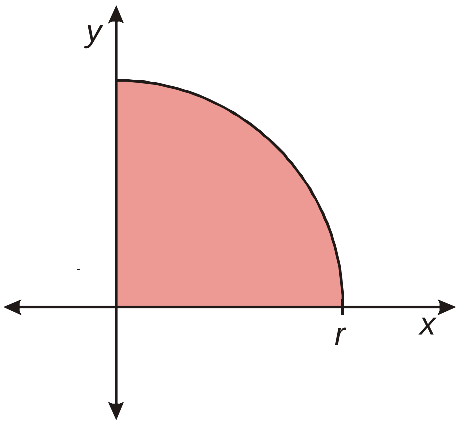
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + 5\left[x\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + 5\left[x\right]_0^1 - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right] + 5\left[0 - (-2)\right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right] + 5(1-0) - 4\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) =$$

$$= -1 + 10 - \left(\frac{8}{3}\right) + 5 - 2 - \frac{1}{3} = 9$$

Pedagogická poznámka: Následující příklad nemohou studenti samozřejmě počítat samostatně. Je zařazen spíše jako ukázka toho, jak se počítají trochu těžší integrály.

Př. 5: Odvoď pomocí integrálu vztah pro obsah kruhu r.



Rovnice kružnice s poloměrem r a středem v bodě $S[0;0]$: $x^2 + y^2 = r^2$

Upravíme do tvaru předpisu funkce: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Obsah plochy: $S = \int_0^r f(x)\, dx = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ - takový integrál spočítat neumíme

Trik: substituce $x = r \sin t$ (zdánlivě obrácený postup než normálně – substitucí si výraz zesložiťujeme) $\Rightarrow$ $dx = r \cos t\, dt$

ještě musíme změnit meze:

- $x = 0 = r\sin t \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$
- $x = r = r\sin t \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$S = \int_0^r f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\, r\cos t\,dt = r\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t\,dt =$$
$$= r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

Použijeme vzorec pro poloviční úhel: $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$$S = \int_0^r f(x)\,dx = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt + \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt =$$
$$= \frac{r^2}{2}[t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{r^2}{2}\cdot\frac{1}{2}[\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{r^2}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi r^2}{4}$$

Spočtený obsah je pouze čtvrtinou obsahu celého kruhu $\Rightarrow$ obsah kruhu je dán vzorcem $S = \pi r^2$.

Př. 6: Petáková:
strana 165/cvičení 100 a) h)

Shrnutí: