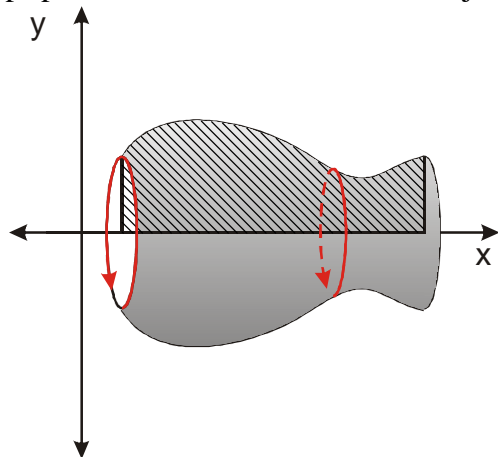


10.3.15 Výpočet objemu rotačních těles

Předpoklady: 10313

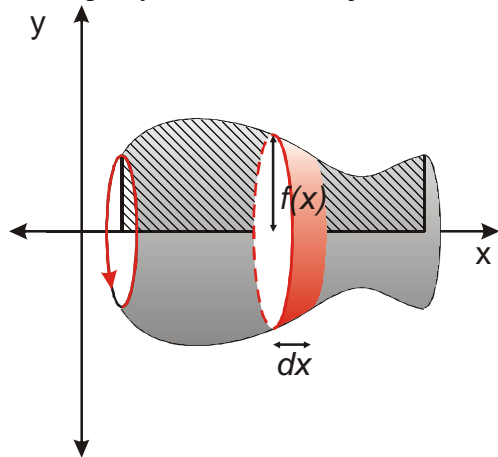
Vzorec pro objem rotačního tělesa si odvodíme způsobem, který sice není nenapadnutelný, ale na druhé straně poměrně přesně odpovídá tomu, co se provozuje v technické praxi.

rotační těleso vznikne rotací rovinného útvaru (na obrázku šrafovaně) kolem osy (v našem případě osa x , na které zároveň leží jedna ze stran útvaru).



Při výpočtech povrchů jsme využívali fakt, že integrování umožňuje sečíst nekonečně mnoho nekonečně tenkých obdélníků.

Analogicky můžeme nakrájet na nekonečně tenké plátky (jako salám) naše rotační těleso.



Sečtením těchto plátek integrací získáme celý objem $V(T) = \int_a^b dV$.

Jaký je objem jednoho kolečka?

Jde o válec (pokud je dx nekonečně malé, funkce nestihne změnit svou hodnotu), kde

$$r = f(x), v = dx \Rightarrow$$

$$\text{objem válce } V = \pi r^2 v \Rightarrow dV = \pi f^2(x) dx$$

$$V(T) = \int_a^b dV = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Př. 1: Vypočti objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $y = 2$, $x = 0$, $x = 4$ kolem osy x . Jaký druh tělesa takto vznikne? Porovnej výsledek vypočtený integrálem s výsledkem vypočteným pomocí vzorce pro objem tohoto tělesa.

Dosadíme do vzorce pro objem rotačního tělesa:

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^4 2^2 dx = \pi \int_0^4 4 dx = \pi [4x]_0^4 = \pi(4 \cdot 4 - 0) = 16\pi$$

Tělesem, které vznikne rotací obdélníku kolem osy x je válec s těmito parametry: $r = 2$, $v = 4$

Objem válce: $V = \pi r^2 v = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$

Př. 2: Vypočti objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $y = 3 - 0,5x$, $x = 0$, $x = 4$ kolem osy x . Jaký druh tělesa takto vznikne? Porovnej výsledek vypočtený integrálem s výsledkem vypočteným pomocí vzorce pro objem tohoto tělesa.

Dosadíme do vzorce pro objem rotačního tělesa:

$$\begin{aligned} V(T) &= \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^4 \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx = \pi \int_0^4 \left(9 - 3x + \frac{1}{4}x^2\right) dx = \pi \left[9x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3 \cdot 4}\right]_0^4 = \\ &= \pi \left[\left(9 \cdot 4 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 + \frac{4^3}{3 \cdot 4}\right) - \left(9 \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 + \frac{0^3}{3 \cdot 4}\right)\right] = \pi \left(36 - 24 + \frac{16}{3}\right) = \frac{52\pi}{3} \end{aligned}$$

Tělesem, které vznikne rotací pravoúhlého lichoběžníku kolem osy x je komolý rotační kužel s těmito parametry: $r_1 = 3$, $r_2 = 3 - 0,5 \cdot 4 = 1$, $v = 4$

Objem komolého rotačního kužele:

$$V = \frac{\pi v}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi \cdot 4}{3} (3^2 + 3 \cdot 1 + 1^2) = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 13}{3} = \frac{52\pi}{3}$$

Př. 3: Odvod' vzorec pro objem koule o poloměru r .

Nejdříve musíme najít funkci, která bude ohraničovat útvar jehož rotací vznikne koule:

Rovnice kružnice o poloměru r se středem v počátku: $x^2 + y^2 = r^2$

Vyjádříme y (předpis funkce): $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

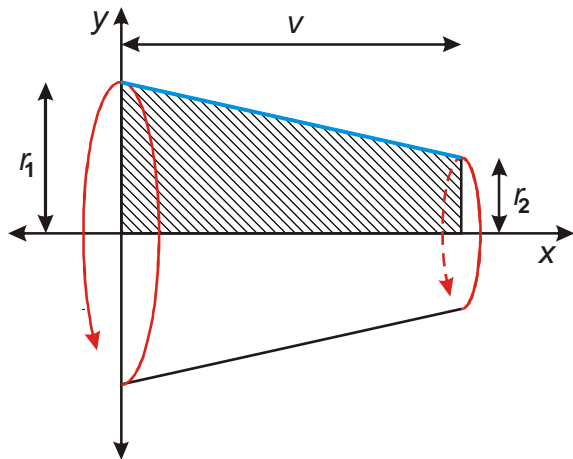
Integrujeme v mezích od 0 do r :

$$\begin{aligned} V(T) &= \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[rx^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = \pi \left(r \cdot r^2 - \frac{r^3}{3}\right) \\ &= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{2}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

\Rightarrow objem celé koule je dvojnásobný $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Př. 4: Odvod' vzorec pro objem komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1 , r_2 a výškou v .

Nakreslíme si obrázek:



Komolý rotační kužel vznikne rotací pravoúhlého lichoběžníku.

Nejdříve musíme najít funkční předpis modře vyznačené strany lichoběžníku.

Jde lineární funkci $y = ax + b$, která prochází body $[0; r_1]$ a $[v; r_2]$.

Funkce $y = ax + b$ prochází bodem $[0; r_1] \Rightarrow b = r_1$.

Koeficient a určíme například pomocí vztahu: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{r_2 - r_1}{v - 0} = \frac{r_2 - r_1}{v}$

Hledaná lineární funkce, kterou budeme integrovat: $y = \frac{r_2 - r_1}{v}x + r_1$.

Dosadíme do vzorce pro výpočet objemu.

$$\begin{aligned}
 V(T) &= \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^v \left[\frac{r_2 - r_1}{v}x + r_1 \right]^2 dx = \\
 &= \pi \int_0^v \left[\left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right)^2 x^2 + 2 \cdot \frac{r_2 - r_1}{v} x \cdot r_1 + r_1^2 \right] dx = \\
 &= \pi \left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right)^2 \int_0^v x^2 dx + \pi \cdot \frac{2r_1(r_2 - r_1)}{v} \int_0^v x dx + \pi r_1^2 \int_0^v dx = \\
 &= \pi \left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right)^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^v + \pi \cdot \frac{2r_1(r_2 - r_1)}{v} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^v + \pi r_1^2 [x]_0^v = \\
 &= \pi \frac{r_2^2 - 2r_1r_2 + r_1^2}{v^2} \cdot \frac{v^3}{3} + \pi \cdot \frac{2r_1r_2 - 2r_1^2}{v} \cdot \frac{v^2}{2} + \pi r_1^2 v = \pi v \left(\frac{r_2^2 - 2r_1r_2 + r_1^2}{3} + \frac{2r_1r_2 - 2r_1^2}{2} + r_1^2 \right) = \\
 &= \pi v \left(\frac{2r_2^2 - 4r_1r_2 + 2r_1^2 + 6r_1r_2 - 6r_1^2 + 6r_1^2}{6} \right) = \pi v \left(\frac{2r_2^2 + 2r_1^2 + 2r_1r_2}{6} \right) = \\
 &= \frac{\pi v}{3} (r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)
 \end{aligned}$$

Objem komolého rotačního kužele je dán vzorcem $V = \frac{\pi v}{3} (r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$

Př. 5: Petáková:
strana 168/cvičení 128 b) d) h) l)
strana 168/cvičení 130 b) h)
strana 168/cvičení 132
strana 168/cvičení 135 a)

Shrnutí: