11.2.1 Číselné obory, číselná osa, množiny, intervaly

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Přípravy na státní maturitu jsem dlouhou dobu prakticky ignoroval s tím, že požadavky u SM jsou daleko menší než na naší škole a každý student, který se dostane do maturitního ročníku na naší škole, by měl státní maturitu udělat. Ještě více mě od SM vzdálilo, když naše škola kvůli tehdy plánované povinné SM z matematiky zavedla speciální opakovací předmět CMP. V mých třídách ho dvakrát po sobě učili kolegové a tak šla příprava na SM zcela mimo mě. Poprvé jsem CMP učil až v roce 2022/2023. Systém, který jsem zvolil je následující. Na začátku si napíšeme zkušební test v podmínkách, které se blíží podmínkám maturity (časový limit 100 minut, tabulky, kalkulačky). Test opravím, žáci si udělají opravu.
Následuje práce s hodinami uvedenými v této kapitole. Prošel jsem zpětně maturitní testy z uplynulých let a vypsal si k sobě příklady, z podobného tématu. Poté jsem k nim nageneroval analogické příklady (které obsahují hodiny v této kapitole). Na každou hodinu dostanou žáci za úkol vytvořit krátké shrnutí, které se týká látky z dané kapitoly (v hodině ho náhodně kontrolujeme). Znalosti, které se ukazují být největším problémem, se snažím přidávat na začátky následujících hodin.

Př. 1: Z je množina všech celých čísel, $A = \langle -2; 3)$. Urči všechny prvky množiny $A \cap Z$. **1 bod**

$A \cap Z = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Př. 2: Je dána množina $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ a interval $B = \langle 2; 4)$. Uveď všechny prvky množiny *A*, které nepatří do průniku $A \cap B$. **1 bod**

Platí: $A \cap B = \{2; 3\}$ $\Rightarrow$ prvky množiny *B*, které nepatří do průniku $A \cap B$ jsou: 0; 1; 4; 5.

Př. 3: M je množina všech reálných čísel, která splňují současně dvě podmínky:
- číslo je větší než –3,
- absolutní hodnota čísla je menší nebo rovna 4.

Zapiš množinu *M* intervalem. **1 bod**

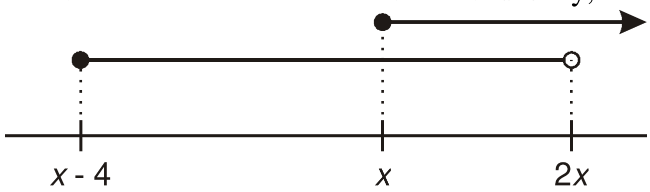
Zapíšeme obě podmínky pomocí intervalů:
- podmínku „číslo je větší než –3“ splňují čísla v intervalu $(-3; \infty)$,
- podmínku „absolutní hodnota čísla je menší nebo rovna 4“ splňují čísla v intervalu $\langle -4; 4\rangle$.

Obě podmínky splňují čísla, která leží v průniku těchto dvou intervalů, tedy čísla v intervalu $(-3; 4\rangle$.

Př. 4: Je dán interval $A = (-4;4\rangle$ a množina $B = \{x \in R; -2 \le x < 7\}$. Urči $A \cap B$. **1 bod**

$A \cap B = \langle -2; 4\rangle$

Př. 5: Na číselné ose jsou znázorněny intervaly *A*, *B*. Platí: $A \cup B = \langle -1; \infty)$. Zapiš intervalem $A \cap B$. Meze intervalu uveď čísly, nesmějí obsahovat proměnnou *x*.



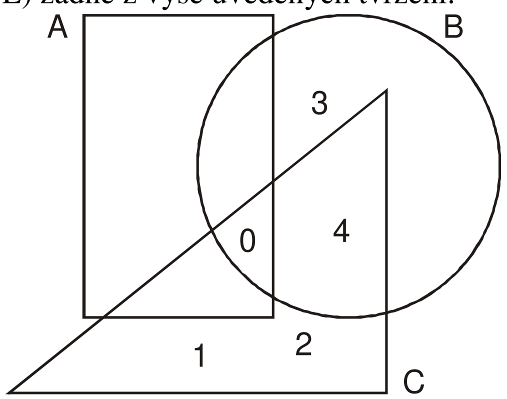
1 bod

Pokud je sjednocením obou intervalů interval $\langle -1; \infty)$ platí $x - 4 = -1 \Rightarrow x = 3$.

Průnikem obou intervalů je tedy interval $\langle x; 2x) = \langle 3; 6)$.

Př. 6: Na obrázku jsou množiny *A*, *B*¸*C*.
Množina *A* obsahuje všechna čísla uvnitř obdélníku, množina *B* všechna čísla uvnitř kruhu a množina *C* všechna čísla uvnitř trojúhelníku. Sjednocením všech tří množin je pětiprvková množina $\{0; 1; 2; 3; 4\}$. Které z následujících tvrzení je pravdivé?

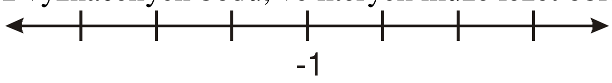
A) $A = \emptyset$ B) $A \cap B = \emptyset$ C) $A \cap C = \emptyset$ D) $A \cap B \cap C = \emptyset$
E) žádné z výše uvedených tvrzení.



2 body

Číslo 0 se nachází v průniku všech tří množin, z toho je zřejmé, ani jedna možností A) až D) nemůže být správná a správná je tedy možnost E).

Př. 7: Na číselné ose je vyznačeno 7 bodů, z nichž jeden jej obraz čísla -1. Právě tři ze zbývajících šesti vyznačených bodů představují obrazy čísel *x*, *y*, *z*, které splňují následující podmínky: $1 > -x$, $y < x$, $-z < -x$. Obtáhni modře všechny z vyznačených bodů, ve kterých může ležet obraz čísla *y*. Zakroužkuj červeně ty z vyznačených bodů, ve kterých může ležet obraz čísla *z*.



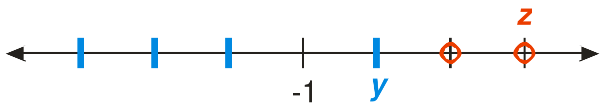
1 bod

Přepíšeme si nerovnosti tak, abychom porovnali čísla mezi sebou:

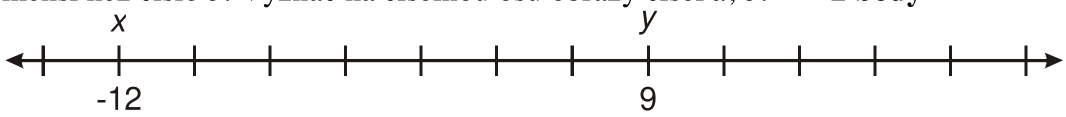
- $1 > -x \Rightarrow -1 < x$

- $y < x$
- $-z < -x \Rightarrow z > x$

$\Rightarrow$ najednou platí $-1 < x < z$ a $y < x < z \Rightarrow$ můžeme označit body na ose:



Př. 8: Na číselné ose je vyznačeno 14 stejných dílků a obrazy čísel $x = -12$, $y = 9$. Pro čísla *a*, *b* platí: číslo *b* je dva a půl krát větší než číslo *a* a zároveň číslo *a* je o 9 menší než číslo *b*. Vyznač na číselnou osu obrazy čísel *a*, *b*. **2 body**



Nejdříve musíme zjistit velikost jednoho dílku stupnice (evidentně není jedna).
Mezi čísly –12 a 9 je na ose 7 dílků, které představují číselný rozdíl $9-(-12)=21$ $\Rightarrow$ na jeden dílek představuje číselný rozdíl $\frac{21}{7}=3$.

Podmínky pro čísla *a*, *b* přepíšeme do rovnic:

- Číslo *b* je dva a půl krát větší než číslo *a*: $b = 2{,}5a$,
- číslo *a* je o 9 menší než číslo *b*: $a = b - 9$.

Řešíme soustavu rovnic, například z druhé dosadíme do první: $b = 2{,}5(b-9)$ $\quad / \cdot 2$

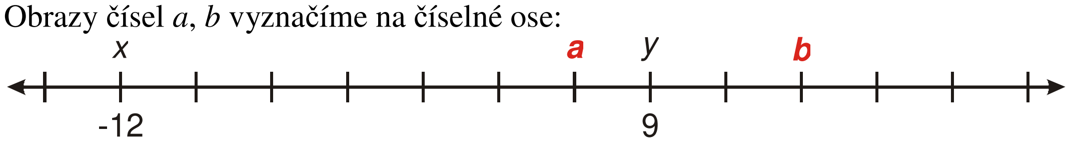
$2b = 5(b-9)$

$2b = 5b - 45 \quad / -2b+45$

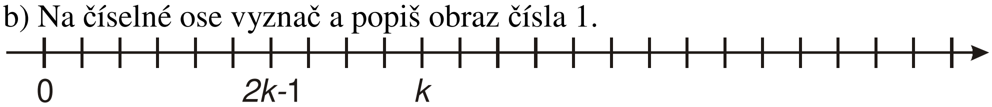
$45 = 3b \quad / :3$

$b = 15$

Dopočteme: $a = b - 9 = 15 - 9 = 6$.
Obrazy čísel *a*, *b* vyznačíme na číselné ose:



Př. 9: Na číselné ose jsou obrazy tří čísel 0, *k* a $2k-1$. Vyznačené dílky jsou stejně dlouhé.
a) Vyjádři poměr $(2k-1):k$.
b) Na číselné ose vyznač a popiš obraz čísla 1.



2 body

a) Vyjádři poměr $(2k-1):k$.
Mezi obrazem čísla $2k-1$ a obrazem čísla 0 je šest dílků, mezi obrazem čísla *k* a obrazem čísla je deset dílků $\Rightarrow$ $(2k-1):k = 6:10 = 3:5$.

b) Na číselné ose vyznač a popiš obraz čísla 1.
Obraz čísla 1 určíme, pokud se nám podaří určit hodnotu čísla *k*. Výraz z předchozího bodu představuje rovnici pro *k*: $(2k-1):k = 3:5$

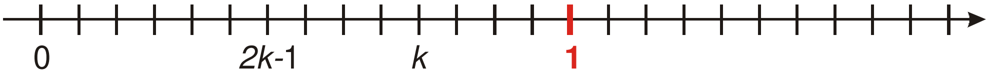
$$\frac{2k-1}{k}=\frac{3}{5} \qquad / \cdot 5 \cdot k$$

$$5(2k-1)=3k$$

$$10k-5=3k \qquad /+5-3k$$

$$7k=5 \qquad /:7$$

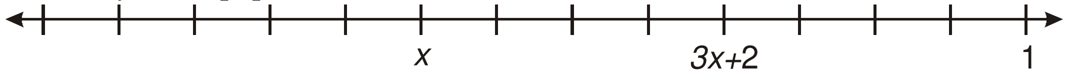
$k=\frac{5}{7}$ $\Rightarrow$ mezi obrazy čísel 0 a $\frac{5}{7}$ je deset dílků $\Rightarrow$ jeden dílek na ose představuje $\frac{1}{14}$.



Dodatek: Obraz čísla 1 je možné najít daleko elegantněji takto: k představuje na ose 10 dílků $\Rightarrow$ $2k$ musí představovat 20 dílků. Jestliže $2k-1$ představuje 6 dílků, musí číslo 1 představovat $2k-(2k-1)=20-6=14$ dílků. Za nápad děkujeme Kristý.

Dodatek: Dobrou doplňující otázkou je bez výpočtu odhadnout, na které z částí, na které rozdělily osu obrazy čísel k a $2k-1$ bude ležet obraz čísla 1.

Př. 10: Na číselné ose jsou obrazy tří čísel 1, x a $3x+2$. Vyznačené dílky jsou stejně dlouhé. Na osu vyznač a popiš obraz čísla 0.



Podobně jako v předchozím příkladu můžeme na ose odečíst počty dílků pro čísla:

- $1-(3x+2)$: 4 dílky,
- $1-x$: 8 dílků.

Platí tedy: $\frac{1-(3x+2)}{1-x}=\frac{4}{8}$

$$\frac{-1-3x}{1-x}=\frac{1}{2} \qquad / \cdot 2(1-x)$$

$$2(-1-3x)=1-x$$

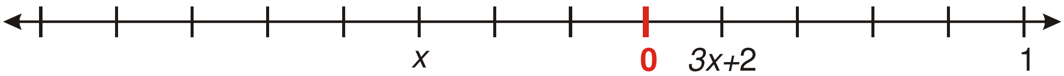
$$-2-6x=1-x \qquad /+6x-1$$

$$-3=5x \qquad /:5$$

$$x=-\frac{3}{5}$$

$$3x+2=3\left(-\frac{3}{5}\right)+2=\frac{-9+10}{5}=\frac{1}{5}$$

Mezi obrazy čísel x a $3x+2$ jsou čtyři dílky $\Rightarrow$ 1 dílek představuje $\frac{1}{5}$.



Shrnutí: