11.2.2 Mocniny

Předpoklady:

Vzorce pro mocniny

Definice mocnin

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{krát}}$ $\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\qquad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$

Zjednodušení:

$a^r a^s = a^{r+s}$ $\qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\qquad \left(a^r\right)^s = a^{rs}$

Závorky:

$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ $\qquad (ab)^r = a^r b^r$ $\qquad (a+b)^r \neq a^r + b^r$

Př. 1: Pro $n \in N$ uprav výraz $9 \cdot \frac{9^{3n}}{3^{3n+1}}$ na mocninu o základu 3. **1 bod**

$$9 \cdot \frac{9^{3n}}{3^{3n+1}} = 3^2 \cdot \frac{\left(3^2\right)^{3n}}{3^{3n+1}} = 3^2 \cdot \frac{3^{6n}}{3^{3n+1}} = 3^{2+6n-(3n+1)} = 3^{3n+1}$$

Př. 2: Pro $a \in R^+$ odstraň závorky a sečti. Výsledný výraz vyjádři bez závorek jediným členem. $\left(-a^2\right)^{-1} - a^{-2} + (-a)^{-2} =$ **1 bod**

$$\left(-a^2\right)^{-1} - a^{-2} + (-a)^{-2} = \frac{1}{-a^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(-a)^2} = -\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = -\frac{1}{a^2}$$

Př. 3: Pro $a \in R^+$ uprav výraz $a^{\frac{1}{6}} : \sqrt[9]{a}$ a vyjádři jej ve tvaru odmocniny o základu *a*. **1 bod**

$$a^{\frac{1}{6}} : \sqrt[9]{a} = a^{\frac{1}{6}} : a^{\frac{1}{9}} = a^{\frac{1}{6}-\frac{1}{9}} = a^{\frac{3}{18}-\frac{2}{18}} = a^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{a}$$

Př. 4: Pro $x \in (0; +\infty)$ zjednoduš $\sqrt{3 \cdot \left(\frac{x^{11}}{3}\right)^3 \cdot \frac{81}{x^{13}}}$ **1 bod**

$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{x^{11}}{3}\right)^3 \cdot \frac{81}{x^{13}}} = \sqrt{3 \cdot \frac{x^{33}}{3^3} \cdot \frac{9^2}{x^{13}}} = \sqrt{\frac{x^{20}}{3^2} \cdot 3^4} = \sqrt{x^{20} \cdot 3^2} = 3x^{10}$$

Př. 5: Vypočti, kterým číslem musíme vydělit 4^{420} abychom dostali 16^{40}. Výsledek vyjádři ve tvaru mocniny. **1 bod**

Hledáme číslo x takové, aby platilo: $\frac{4^{420}}{x}=16^{40} \quad / \cdot \frac{x}{16^{40}}$

$$x=\frac{4^{420}}{16^{40}}=\frac{4^{420}}{\left(4^2\right)^{40}}=\frac{4^{420}}{4^{80}}=4^{340}$$

Př. 6: Vypočti $25\ \%$ z čísla 2^{1500}. Výsledek vyjádři ve tvaru mocniny. **1 bod**

25 % z čísla je jedna čtvrtina.

$$\frac{1}{4}\cdot 2^{1500}=\frac{1}{2^2}\cdot 2^{1500}=2^{1498}$$

Př. 7: Pro $a\in(0;+\infty)$ zjednoduš $\sqrt[3]{27\cdot a^{15}}\cdot\sqrt{a^{-4}}$ **1 bod**

$$\sqrt[3]{27\cdot a^{15}}\cdot\sqrt{a^{-4}}=\left(3^3\cdot a^{15}\right)^{\frac{1}{3}}\left(a^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}=3\cdot a^5\cdot a^{-2}=3a^3$$

Př. 8: Pro $x\in(0;+\infty)$ zjednoduš výraz: $\frac{\left(x^4\right)^{100}}{x^{200}\cdot\sqrt{x^{-200}}}$. **1 bod**

$$\frac{\left(x^4\right)^{100}}{x^{200}\cdot\sqrt{x^{-200}}}=\frac{x^{400}}{x^{200}\cdot x^{-100}}=x^{400-200-(-100)}=x^{300}$$

Matematika plus

Př. 9: Je dán výraz z proměnnou $n\in N$: $\frac{8^n}{2}-2\cdot 8^{n-1}$. Uprav jej a vyjádři ho jako součin některého z přirozených čísel od 1 do 9 a mocniny čísla 8. **1bod**

Vytkneme nejvyšší společnou mocninu čísla 8:

$$\frac{8^n}{2}-2\cdot 8^{n-1}=\frac{8\cdot 8^{n-1}}{2}-2\cdot 8^{n-1}=8^{n-1}\left(\frac{8}{2}-2\right)=2\cdot 8^{n-1}$$

Př. 10: Najdi nejmenší přirozené číslo n takové, aby sedmá odmocnina součinu $n\cdot 12^{103}$ byla přirozené číslo. **1 bod**

Rozepíšeme si součin: $n\cdot 12^{103}=n\cdot\left(2^2\cdot 3\right)^{103}=n\cdot\left(2^2\right)^{103}\cdot 3^{103}$.

Pokud má být $\sqrt[7]{n\cdot\left(2^2\right)^{103}\cdot 3^{103}}$ přirozené číslo musí platit:

$\sqrt[7]{n\cdot\left(2^2\right)^{103}\cdot 3^{103}}=\sqrt[7]{2^{7a}\cdot 3^{7b}}=2^a\cdot 3^b \Rightarrow$ hledáme tedy číslo n jako součin mocnin 2 a 3 takových, aby celkové mocniny součinu byly dělitelné sedmi.

$103:7=14\,(\text{zbytek } 5)$

33

5

$n\cdot\left(2^2\right)^{103}\cdot 3^{103}=n\cdot\left(2^2\right)^{7\cdot 14}\cdot\left(2^2\right)^5\cdot 3^{7\cdot 14}\cdot 3^5=\left(2^2\right)^{7\cdot 14}\cdot 3^{7\cdot 14}\cdot n\cdot 2^{10}\cdot 3^5$

Do součinu musíme ve formě čísla n přidat alespoň $2^4\cdot 3^2$, aby všechny jeho části byly sedmé mocniny a jejich sedmá odmocnina byla přirozené číslo.

$n=2^4\cdot 3^2=144$

Př. 11: Je dáno číslo $x=\dfrac{16^{231}-2^{919}}{8^{221}}$. Které tvrzení není pravdivé?

A) Číslo x je celé.

B) Číslo x je sudé.

C) Číslo x je větší než 32^{52}.

D) Číslo x je násobek 31.

E) Číslo x je možné zapsat ve tvaru 2^k, kde $k\in N$.

2 body

Upravíme si výraz udávající hodnotu čísla x:

$$x=\frac{16^{231}-2^{919}}{8^{221}}=\frac{\left(2^4\right)^{231}-2^{919}}{\left(2^3\right)^{221}}=\frac{2^{924}-2^{919}}{2^{663}}=\frac{2^{919}\left(2^5-1\right)}{2^{663}}=2^{919-663}\cdot(32-1)=2^{256}\cdot 31$$

Nyní rozhodneme o pravdivosti jednotlivých tvrzení.

A) Číslo x je celé.

$x=2^{256}\cdot 31$ a je tedy celé $\Rightarrow$ tvrzení je pravdivé.

B) Číslo x je sudé.

$x=2^{256}\cdot 31=2\cdot\left(2^{254}\cdot 31\right)$ a je tedy sudé $\Rightarrow$ tvrzení je pravdivé.

C) Číslo x je větší než 32^{52}.

$32^{52}=\left(2^5\right)^{52}=2^{5\cdot 52}=2^{260}=2^{256}\cdot 2^4=2^{256}\cdot 16<2^{256}\cdot 31=x \Rightarrow$ tvrzení je pravdivé.

D) Číslo x je násobek 31.

$x=2^{256}\cdot 31$ a je tedy násobek 31 $\Rightarrow$ tvrzení je pravdivé.

E) Číslo x je možné zapsat ve tvaru 2^k, kde $k\in N$.

$x=2^{256}\cdot 31$ a je násobek 31 $\Rightarrow$ nemůžeme ho zapsat jako přirozenou mocninu 2 $\Rightarrow$ tvrzení je pravdivé.

Nepravdivé je tvrzení E).

Shrnutí: