

## 11.2.2 Procenta I

### Předpoklady:

**Př. 1:** Pro  $x \in R \setminus \left\{ -\frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3} \right\}$  zjednoduš na tvar bez závorek:

$$\left( \frac{2x}{3x+2} - \frac{6x^2-4x}{9x^2-4} \right) : \frac{x}{3x+2} = . \text{ V záznamovém archu uveď celý postup řešení.}$$

**max. 2 body**

$$\begin{aligned} \left( \frac{2x}{3x+2} - \frac{6x^2-4x}{9x^2-4} \right) : \frac{x}{3x+2} &= \left[ \frac{2x}{3x+2} - \frac{2x(3x-2)}{(3x-2)(3x+2)} \right] \cdot \frac{3x+2}{x} = \left( \frac{2x}{3x+2} - \frac{2x}{3x+2} \right) \cdot \frac{3x+2}{x} = \\ &= 0 \cdot \frac{3x+2}{x} = 0 \end{aligned}$$

**Př. 2:** Odstraň závorky a sečti. Výsledný výraz vyjádři jako zlomek v základním tvaru.

$$\left[ (-2)^2 \right]^{-1} + (-2^2)^{-1} + (-2)^{-2} - 2^{-2} =$$

**1 bod**

$$\left[ (-2)^2 \right]^{-1} + (-2^2)^{-1} + (-2)^{-2} - 2^{-2} = 4^{-1} + (-4)^{-1} + \frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

**Př. 3:** Čtvrtina všech vyrobených čipů neprojde výstupní kontrolou. Z bezchybných čipů se prodá 80 %. Jaká část vyrobených čipů se prodá? **1 bod**

Čtvrtina čipů neprojde kontrolou  $\Rightarrow$  tři čtvrtiny kontrolou projdou a z nich se prodá 80 %  $\Rightarrow$  podíl prodaných čipů je  $\frac{3}{4} \cdot 0,8 = 0,6$ .

Prodá se 60 % vyrobených čipů.

- Př. 4:** A) Ropa byla v září o 20 % levnější než v srpnu. V říjnu se pak její cena zvýšila na 125 % zářijové ceny.  
B) Elektřina zdražila nejdříve o 20 % a poté ještě o 25 % již zvýšené ceny.  
C) Obchodník prodal 60 % jahod za plánovanou cenu, zbývající jahody pak se slevou 30 %.

U každého z následujících tvrzení rozhodni, zda je pravdivé (ANO) nebo nepravdivé (NE).

- A) Cena ropy byla v říjnu stejná jako srpnu.  
B) Po obou zvýšeních ceny byla elektřina o polovinu dražší než na začátku zdražování.  
c) Obchodník splnil svůj plán prodat všechny jahody za minimálně 85 % plánované ceny.
- max. 3 body**

A) Cena ropy byla v říjnu stejná jako srpnu.

Sledujeme cenu ropy:

- cena v srpnu:  $x$ ,
- cena v září:  $x \cdot 0,8$ ,
- cena v říjnu:  $x \cdot 0,8 \cdot 1,25 = x \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = x \Rightarrow$  cena v říjnu byla stejná jako cena v srpnu  
 $\Rightarrow$  tvrzení je pravdivé (ANO)

B) Po obou zvýšeních ceny byla elektřina o polovinu dražší než na začátku zdražování.

Sledujeme cenu elektřiny:

- původní cena:  $x$ ,
- cena po prvních zdražení:  $1,2 \cdot x$ ,
- cena po druhém zdražení:  $1,25 \cdot 1,2 \cdot x = 1,5x \Rightarrow$  elektřina bylo o polovinu dražší  $\Rightarrow$  tvrzení je pravdivé.

c) Obchodník splnil svůj plán prodat všechny jahody za minimálně 85 % plánované ceny.

Peníze utržené za prodané jahody:

- 60 % jahod za plánovanou cenu:  $0,6 \cdot 1 = 0,6$ ,
- zbytek (40 %) se slevou 30 % (tedy za 70 % ceny):  $0,4 \cdot 0,7 = 0,28$

$\Rightarrow$  celkem utržil:  $0,6 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,7 = 0,6 + 0,28 = 0,88$ , což je více než  $1 \cdot 0,85 = 0,85 \Rightarrow$

tvrzení je pravdivé.

**Dodatek:** Hodnocení: 3 podúlohy 3 body, 2 podúlohy 1 bod, 1 podúloha 0 bodů.

**Pedagogická poznámka:** Část žáků odpovídá v bodu A) automaticky NE, protože „ropa zlevnila o 20 %, pak zdražila o 25 %, což je víc než 20 %, takže na konci bude dražší než na začátku. Tato argumentace zcela pomíjí, že 20 % zlevnění vychází ze základu 1, který je větší než menší základ po zlevnění 0,8.

**Př. 5:** Jirka řešil v písemce čtyři úlohy. Řešení druhé úlohy mu trvalo o čtvrtinu déle než řešení první, se třetí se trápil dokonce dvakrát déle než s druhou. Čtvrtou úlohu naopak zvládl čtyřikrát rychleji než první. Kolik procent z celkové doby strávil řešením první úlohy? **1 bod**

Označíme si část času na celou písemku, který strávil řešením první úlohy  $x$  a všechny ostatní části vyjádříme pomocí této proměnné:

- první úloha:  $x$ ,
- druhá úloha trvala o čtvrtinu déle než první:  $x + \frac{x}{4} = \frac{5}{4}x$ ,
- třetí dvakrát déle než s druhá:  $2 \cdot \frac{5}{4}x = \frac{10}{4}x$ ,
- čtvrtá čtyřikrát rychleji než první:  $\frac{1}{4} \cdot x = \frac{x}{4}$

Řešení čtyř úloh strávil celý čas:  $x + \frac{5}{4}x + \frac{10}{4}x + \frac{x}{4} = 1$

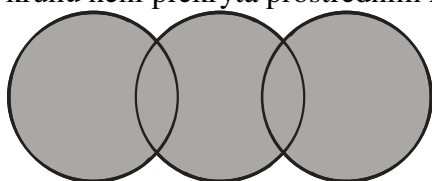
$$\frac{4x + 5x + 10x + x}{4} = 1$$

$$\frac{20}{4}x = 5x = 1$$

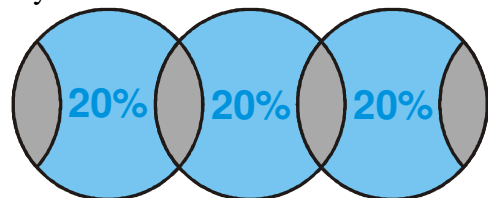
$$x = \frac{1}{5} = 0,2$$

Jirka strávil řešením první úlohy 20 % celkového času na celou písemku.

**Př. 6:** Logo tvoří tři shodné stejně se překrývající kruhy. Obsah části prostředního kruhu, který se nepřekrývá s krajními kruhy tvoří přesně 20 % obsahu celého útvaru. Jakou část obsahu celého útvaru tvoří jeden kruh? Jaká část obsahu každého z krajních kruhů není překryta prostředním kruhem? **1 bod**



Vyznačíme si v obrázku 20 % část i do ostatních kruhů.



Tři modré části loga zabírají dohromady 60 %  $\Rightarrow$  na čtyři stejné šedivé části, které tvoří zbytek plochy, tak připadá 40 % plochy  $\Rightarrow$  jedna šedá oblast zabírá 10 % plochy celého loga. Jeden kruh tvoří jedna modrá a dvě šedé plochy  $\Rightarrow$  kruh tedy zabírá 20 % + 10 % + 10 % = 40 % celého obrazce.

Celý krajní kruh představuje 40 % , šedá část překrytá s prostředním kruhem 10 %  $\Rightarrow$  nezakrytá část krajního kruhu představuje 30 % celého obrazce. Zjistíme jakou část tvoří

těchto 30 % z jednoho kruhu (tedy ze 40 % - toto je nový celek pro vyřešení této otázky)  $\Rightarrow$   
 nepřekrytá část tvoří  $\frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0,75$  % plochy krajního kruhu.

**Pedagogická poznámka:** Odpověď na druhou otázku je často 30 %, protože žáci nezaregistrují změnu celku.

**Př. 7:** Pan Horník si kupoval nové auto. Původně chtěl koupit auto s naftovým motorem, ale utratil by za něj 69 % svých úspor. Nakonec tedy koupit stejný vůz z benzínovým motorem a tak mu 40 % úspor zbylo. O kolik procent je auto s naftovým motorem dražší? **1 bod**

Hodnotu úspor označíme například  $u$ :

Útrata za:

- naftové auto:  $0,69u$
- benzínové auto:  $u - 0,4u = 0,6u$  (v zadání je udáno, jaká část úspor mu zbyla, ne jakou část utratil)

O kolik procent je auto s naftovým motorem dražší?  $\Rightarrow$  za celek považujeme cenu benzínového auta:

$$\begin{array}{lcl} 0,6u & \dots & 100 \% \\ 0,69u & \dots & x \% \\ \frac{x}{0,69u} = \frac{100}{0,6u} & \Rightarrow & x = \frac{0,69u}{0,6u} \cdot 100 = 115 \end{array}$$

Cena naftového vozu představuje 115 % ceny benzínového, je tedy o 15 % dražší.

**Př. 8:** Eva, Pavlína a Andrea vedou společně kroužek tenisových nadějí. Dohromady při tom v minulém roce odpracovaly 320 dobrovolnických hodin. Pavlína dětem věnovala o 15% času méně než Eva, která dobrovolnictvím strávila o 20 % více hodin než představuje průměr pro Pavlínu a Andreu. Vypočítej kolik hodin se dětem věnovala Andrea. V záznamovém archu uveď celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnice, řešení a odpověď). **max. 3 body**

Počty hodin, které odpracovala každá z dívek označíme počátečním písmenem jejich jmen.

Dohromady odpracovaly 320 hodin ...  $e + p + a = 320$

Pavlína věnovala dětem o 15 % méně času než Eva ...  $p = 0,85 \cdot e$

Eva dobrovolnictvím strávila o 20 % více hodin než představuje průměr pro Pavlínu a Andreu

$$\dots \quad e = 1,2 \cdot \left( \frac{p+a}{2} \right)$$

Řešíme soustavu rovnic. upravíme poslední rovnici:  $e = 1,2 \cdot \left( \frac{p+a}{2} \right) = 0,6 \cdot (p+a)$  a

dosadíme do zbývajících dvou.

$$e + p + a = 0,6(p+a) + p + a = 1,6p + 1,6a = 320$$

$$16a + 16p = 3200 \Rightarrow a + p = 200$$

$$p = 0,85 \cdot e = 0,85 \cdot 0,6(p+a) = 0,51p + 0,51a$$

$$0,49p = 0,51a \Rightarrow p = \frac{0,51a}{0,49} = \frac{51}{49}a$$

Dosadíme do první rovnice:  $a + \frac{51}{49}a = 200$

$$\frac{100}{49}a = 200$$

$$a = 200 \cdot \frac{49}{100} = 98$$

Andrea věnovala kroužku tenisových nadějí 98 hodin.

**Shrnutí:**