

11.2.6 Procenta II

Předpoklady:

Př. 1: Odstraň závorky a sečti. Výsledný výraz vyjádři jako zlomek v základním tvaru.

$$(-3)^{-2} + (-3)^2 + (-3^2) + [(-3)^2]^{-1} = \quad \text{1 bod}$$

$$(-3)^{-2} + (-3)^2 + (-3^2) + [(-3)^2]^{-1} = \frac{1}{(-3)^2} + 9 + (-9) + \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} + 9 - 9 + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Př. 2: Pro $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right\}$ zjednoduš: $\left(\frac{3y+2}{2y-1} - \frac{4y^2+2y}{4y^2-1} \right) : \frac{y}{2y-1} =$. V záznamovém archu uveď celý postup řešení. **max. 2 body**

$$\begin{aligned} \left(\frac{3y+2}{2y-1} - \frac{4y^2+2y}{4y^2-1} \right) : \frac{y}{2y-1} &= \left[\frac{3y+2}{2y-1} - \frac{2y(2y+1)}{(2y-1)(2y+1)} \right] \cdot \frac{2y-1}{y} = \\ &= \left(\frac{3y+2}{2y-1} - \frac{2y}{2y-1} \right) \cdot \frac{2y-1}{y} = \left(\frac{3y+2-2y}{2y-1} \right) \cdot \frac{2y-1}{y} = \frac{y+2}{2y-1} \cdot \frac{2y-1}{y} = \frac{y+2}{y} \end{aligned}$$

Př. 3: Přiřaď ke každé úloze odpovídající výsledek (A-E).

1) Jirka utratil v kavárně 180 Kč, což je o polovinu méně než Karolína. Kolik korun utratili oba dohromady?

2) Vklad 21 820 Kč je uložen na 2 roky s roční úrokovou sazbou 1,5 %. Úroky se zdaňují 15 % a připisují se na účet vždy na konci roku. Kolik korun přibude ke vkladu za 2 roky? (výsledek je zaokrouhlen na celé číslo).

3) Sada LED světel na vánoční stromeček byla během ledna dvakrát zlevněna a to vždy o 15 % z předchozí ceny. Aktuálně stojí 419 Kč. Jaká byla její původní cena před prvním zlevněním?

A) méně než 520 korun

B) 540 korun

C) 560 korun

D) 580 korun

E) jiný počet korun **max. 3 body (podúloha 1 bod)**

1) Jirka utratil v kavárně 180 Kč, což je o polovinu méně než Karolína. Kolik korun utratili oba dohromady?

Karolíny útrata ... k

Jirkova útrata ... $0,5k = 180 \Rightarrow k = 360$

Celková útrata: $360 + 180 = 540$ Kč \Rightarrow správná možnost B)

2) Vklad 21 820 Kč je uložen na 2 roky s roční úrokovou sazbou 1,5 %. Úroky se zdaňují 15 % a připisují se na účet vždy na konci roku. Kolik korun přibude ke vkladu za 2 roky? (výsledek je zaokrouhlen na celé číslo).

Úrok na konci prvního roku $21\,820 \cdot 0,015 \cdot 0,85$

Částka na konci prvního roku ... $21\,820 + 21\,820 \cdot 0,015 \cdot 0,85$ (vložené peníze + úrok) $21\,820 + 21\,820 \cdot 0,015 \cdot 0,85 = 21\,820(1 + 0,015 \cdot 0,85)$

Úrok na konci druhého roku: $21\,820(1+0,015 \cdot 0,85) \cdot 0,015 \cdot 0,85$

Peníze na konci druhého roku:

$$21\,820 \cdot (1+0,015 \cdot 0,85) + 21\,820 \cdot (1+0,015 \cdot 0,85) \cdot 0,015 \cdot 0,85 = \\ = 21\,820 \cdot (1+0,015 \cdot 0,85) \cdot (1+0,015 \cdot 0,85) = 21\,820(1+0,015 \cdot 0,85)^2$$

Připsáno bankou za dva roky: $21\,820(1+0,015 \cdot 0,85)^2 - 21\,820 = 559,96 \doteq 560$ Kč \Rightarrow správná možnost C)

3) Sada LED světel na vánoční stromeček byla během ledna dvakrát zlevněna a to vždy o 15 % z předchozí ceny. Aktuálně stojí 419 Kč. Jaká byla její původní cena před prvním zlevněním?

Původní cena: x .

Po prvním zlevnění: $x \cdot 0,85$

Po druhém zlevnění: $x \cdot 0,85 \cdot 0,85 = x \cdot 0,85^2 = 419$

$$x = \frac{419}{0,85^2} \doteq 580 \text{ Kč} \Rightarrow \text{správná možnost D).}$$

Celková odpověď: 1B, 2C, 3D.

Dodatek: V bodu b) je možné získat výsledek rychleji vyčíslením vztahů pro připsané částky na koncích roku:

$$21\,820 \cdot 0,015 \cdot 0,85 + 21\,820(1+0,015 \cdot 0,85) \cdot 0,015 \cdot 0,85 \doteq 278 + 282 = 560 \text{ Kč}$$

Podstatně jednodušší je řešení příkladu pro žáky, kteří již brali finanční matematiku a dokáží používat vzorech pro složené úrokování.

Př. 4: Jana a Petrou odjeli na letní prázdniny na brigádu. Jana byla na brigádě už podruhé, pracovala jako vedoucí skupiny a tak si vydělávala každý den o tři pětiny více než Petra. Obě kamarádky pracovaly pět dní v týdnu. Každý pracovní den Petra vydělala 1200 Kč, tedy pětinu svého týdenního výdělku. Obě pracovaly stejný počet týdnů. Rozhodni o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé či nikoliv

1. Petra vydělávala týdně o 60 % méně než Jana.
2. Jana vydělávala týdně o 3600 Korun více než Petra.
3. Během celé brigády Jana vydělala o 60 % více než Petra.
4. Za osm týdnů brigády Jana s Petrou vydělaly dohromady přes 125 000 Kč.

Max 2 body (4 podúlohy 2 body, 3 podúlohy 1 bod, méně než tři 0 bodů)

Označíme si denní výděly j a p .

Platí: Jana si vydělávala o tři pětiny více než Petra: $j = p + \frac{3}{5}p = \frac{8}{5}p$

Každý den Petra vydělala 1200 Kč: $p = 1200$

1. Petra vydělávala týdně o 60 % méně než Jana.

$$j = \frac{8}{5}p \Rightarrow p = \frac{5}{8}j = 0,625j \neq 0,40j \Rightarrow \text{Tvrzení není pravdivé.}$$

2. Jana vydělávala týdně o 3600 Korun více než Petra.

$$\text{Denní výdělek Jany: } j = \frac{8}{5}p = \frac{8}{5} \cdot 1\,200 = 1\,920.$$

Rozdíl ve výdělku: $1920 - 1200 = 720$

Týdenní rozdíl ve výdělku: $720 \cdot 5 = 3\,600$ Kč \Rightarrow tvrzení je pravdivé.

3. Během celé brigády Jana vydělala o 60 % více než Petra.

$\frac{3}{5} = 0,60 \Rightarrow$ Petra každý den vydělala o 60 % více. Protože obě dívky pracovaly stejný počet dnů, musela Jana za celou brigádu vydělat o 60 % více.

4. Za osm týdnů brigády Jana s Petrou vydělaly dohromady přes 125 000 Kč.

Denní výdělek obou dívek dohromady: $1\,200 + 1\,920 = 3\,120$

Za celou brigádu (osm týdnů po pěti dnech): $3\,120 \cdot 5 \cdot 8 = 124\,800$ Kč \Rightarrow tvrzení není pravdivé.

Celkový výsledek: 1N, 2A, 3A, 4N.

Př. 5: Besídka místní ZUŠ se v městském divadle uskutečnila celkem třikrát. V divadle je celkem n míst k sezení a o 80 míst méně na takzvaných přístavcích. Během prvních dvou představení byla všechna místa k sezení obsazená, při posledním představení již byla čtvrtina míst k sezení volná. Celkem za všechna tři představení byly obsazeny tři čtvrtiny všech míst.

Vyjádři v závislosti na veličině n , počet:

a) všech návštěvníků všech představení dohromady,

b) počet návštěvníků, kteří seděli na přístavcích.

max. 2 body

Počet míst k sezení ... n

Počet míst na přístavcích ... $n - 80$

Počet míst na jedno představení celkově:

$místa\ k\ sezení + místa\ na\ přístavcích = n + n - 80 = 2n - 80$

Počet všech míst na tři představení: $3 \cdot (2n - 80) = 6n - 240$

a) všech návštěvníků všech představení dohromady: obsazeno bylo tři čtvrtiny všech míst:

$$\frac{3}{4}(6n - 240) = \frac{9}{2}n - 180$$

b) počet návštěvníků, kteří seděli na přístavcích ...

$počet\ všech\ návštěvníků - počet\ návštěvníků\ na\ místech\ k\ sezení =$

$$\frac{9}{2}n - 180 - n - n - \frac{3}{4}n = 4,9n - 180 - 2,75n = 1,75n - 180$$

Př. 6: Vanda se učila střílet lukem. Na začátečnické vzdálenosti se z prvních dvaceti ran trefila pouze osmkrát. Z dalších dvaceti ran už chybovala pouze šestkrát. Ve všech následujících už neminula ani jednou.

Jaká byla její procentuální úspěšnost po padesáti pokusech?

Kolik celkem pokusů na začátečnické vzdálenosti absolvovala, jestliže dosáhla celkové úspěšnosti 75 %?

Uveď celý postup řešení.

Max 3 body

První dvacet ran: 8 úspěchů, 12 neúspěchů.

Druhých dvacet ran: 14 úspěchů, 6 neúspěchů

Dalších deset ran: 10 úspěchů.

Celkem z prvních padesáti ran: 32 úspěchů, 18 neúspěchů $\Rightarrow \frac{32}{50} = 0,64 \Rightarrow$ úspěšnost 64 %.

Celkový počet pokusů ... n

Celkový počet neúspěchů 18

Celková úspěšnost: $\frac{n-18}{n} = 0,75 \quad | \cdot n$

$$n-18 = 0,75n \quad | -18 - 0,75n$$

$$0,25n = 18 \quad | \cdot 4$$

$$n = 72$$

Vanda na začátečnické vzdálenosti absolvovala celkem 72 pokusů.

Př. 7: Návštěvníci dne otevřených dveří dostávali na památku ročenku gymnázia. Ročenky byly baleny v krabicích po n kusech. Den otevřených dnů se konal dvakrát. Obsah jedné krabice stačil během prvního termínu pro 15 % návštěvníků, v druhém termínu

byl zájem menší a tak obsah jedné krabice vystačil pro $\frac{2}{5}$ příchozích. Na konci

druhého termínu byly všechny krabice kromě poslední prázdné. Kolik procent z původního počtu n kusů ročenky zbylo v této poslední krabici?

a) méně než 20 %

B) přibližně 27 %

C) 45%

D) přibližně 67 %

E) více než 80 %

2 body

Spočteme počet rozdaných ročenek v obou dnech:

První den: obsah jedné krabice stačil během prvního termínu pro 15 % návštěvníků

15 % návštěvníků ... n ročenek

100 % návštěvníků ... x ročenek

$$\frac{x}{n} = \frac{100}{15} \Rightarrow x = \frac{20}{3}n$$

Druhý den: obsah jedné krabice vystačil pro $\frac{2}{5}$ příchozích

$\frac{2}{5}$ návštěvníků ... n ročenek

$\frac{5}{5}$ návštěvníků ... y ročenek

$$\frac{y}{n} = \frac{5}{\frac{2}{5}} \Rightarrow y = \frac{5}{2}n$$

Celkem bylo rozdáno: $x + y = \frac{20}{3}n + \frac{5}{2}n = \frac{40+15}{6}n = \frac{55}{6}n = 9\frac{1}{6}n$ ročenek, tedy 9 celých

krabic a $\frac{1}{6}$ krabice \Rightarrow v poslední krabici zbylo $\frac{5}{6} \doteq 0,83$ obsahu \Rightarrow správná možnost E) více než 80 %.

Př. 8: Pracovník, který byl z výzkumného ústavu propuštěn kvůli krádeži, omylem skartoval dokumentaci důležitého pokusu. V dokumentaci, kterou se podařilo zajistit,

se našlo pouze několik ručně psaných poznámek. Při pokusu byla testována odolnost plodiny proti třem druhům herbicidů vždy na stejném počtu pokusných rostlin. Herbicid A přežilo pět sedmin pokusných rostlin, herbicid B přežilo o 20 % rostlin více než herbicid A, herbicid C zahubil 840 pokusných rostlin. Celkem pokus přežily dvě třetiny pokusných rostlin. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočti, kolik rostlin bylo testována každým z herbicidů. Max 3 body

Počet pokusných rostlin pro každý z herbicidů	...	x
Sledujeme počet rostlin, které přežily.		
Herbicid A přežilo pět sedmin pokusných rostlin	...	$\frac{5}{7}x$
Herbicid B přežilo o 20 % rostlin více než herbicid A	...	$1,2 \cdot \frac{5}{7}x$
Herbicid C zahubil 840 pokusných rostlin \Rightarrow přežilo	...	$x - 840$
Celkem přežily dvě třetiny pokusných rostlin	...	$\frac{2}{3} \cdot 3x$

$$\frac{5}{7}x + 1,2 \cdot \frac{5}{7}x + x - 840 = \frac{2}{3} \cdot 3x$$

$$\frac{5}{7}x + \frac{6}{7}x + x - 840 = 2x \quad / \cdot 7$$

$$5x + 6x + 7x - 7 \cdot 840 = 14x \quad / -14x - 7 \cdot 840$$

$$4x = 7 \cdot 840 \quad / : 4$$

$$x = 7 \cdot 210 = 1470$$

Každým z herbicidů bylo testováno 1470 rostlin.

Matematika plus

Př. 9: Výrobní podnik vyrobil testovací sérii nového výrobku. Z této testovací série byla první pětina výrobků prodána za zaváděcí cenu, která představovala 80 % výrobních nákladů. Zbytek testovací série bude prodán za normální cenu, která je o 50 % vyšší než jsou výrobní náklady. Kolik procent výrobků z testovací série je třeba prodat, aby se pokryly výrobní náklad celé série?

Počet výrobků	...	n
Výrobní cena výrobku	...	c
Výrobní cena všech výrobků	...	nc

$$\text{Utržená cena za výrobky prodané za zaváděcí cenu} \quad \dots \quad \frac{1}{5}n \cdot 0,80c = 0,16nc$$

$$\text{Utržená cena za } x \text{ procent výrobků, které musíme prodat, abychom pokryli výrobní náklady} \\ \dots \quad x \cdot n \cdot 1,5c = 1,5xnc$$

$$\text{Peníze utržené za prodané výrobky má pokrýt výrobní náklady: } 0,16nc + 1,5xnc = nc \quad / : nc \\ 0,16 + 1,5x = 1 \quad / -0,16$$

$$1,5x = 0,84 \quad / : 1,5$$

$$x = 0,56$$

Aby se pokryly náklady na výrobu testovací série, musí se za normální cenu 56 % vyrobených výrobků.

Shrnutí: