

11.2.11 Slovní úlohy I

Předpoklady:

Př. 1: Na filmové představení byly zamluveny tři čtvrtiny ze všech sedadel. Sedm návštěvníků si ale své lístky nevyzvedlo a během představení tak byly obsazeny pouze dvě třetiny sedadel. Urči počet sedadel v kině za předpokladu, že na představení dorazili pouze diváci, kteří si předem zmluvili lístky. **1 bod**

Počet sedadel v kině ... s

Zamluveny tři čtvrtiny sedadel ... $\frac{3}{4}s$

Obsazeny dvě třetiny sedadel ... $\frac{2}{3}s$

Sedm návštěvníků si ale své lístky nevyzvedlo a tak byly místo tří čtvrtin obsazeny dvě třetiny

$$\dots \quad \frac{3}{4}s - 7 = \frac{2}{3}s \quad / \cdot 12$$

$$9s - 84 = 8s \quad / -8s + 84$$

$$s = 84$$

Kinosál má celkem 84 sedadel.

Dodatek: Úlohu je možné řešit i bez neznámé. Sedm diváků, kteří si nevyzvedli zamluvený

lístek tvoří: $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9-8}{12} = \frac{1}{12}$ kapacity sálu.

$\frac{1}{12}$ sálu ... 7 sedadel

$\frac{12}{12}$ sálu ... $7 \cdot 12 = 84$ sedadel

Př. 2: Smrkové dřevo má výhřevnost 1600 kWh/PRM, u dubového dřeva je udávána hodnota 2100 kWh/PRM. Během zimy Petr protopil 8 PRM dubového dřeva. Kolik PRM musí nakoupit, pokud se rozhodl příští zimu topit levnějším smrkovým dřevem?

1 bod

Dřevo spalujeme kvůli kWh tepelné energie, která se při spalování uvolňuje a zahřívá dům
 \Rightarrow záleží na tom, abychom v dalším roce spálením dřeva uvolnili stejné množství kWh.

kWh uvolněné z dubu se musí rovnat kWh uvolněným ze smrku: $2100 \cdot 8 = 1600 \cdot x \quad / : 1600$

$$x = \frac{2100 \cdot 8}{1600} = 10,5$$

Petr musí na další rok nakoupit 10,5 PRM smrkového dřeva.

Dodatek: PRM je prostorový metr rovnaný je jednotka používaná při prodeji palivového dříví. 1 PRM dřeva představuje 1 m^3 rovnaných skládaných polen (nejčastěji o délce 1 m) a obsahuje 60 – 75 % dřeva.

Př. 3: Do distribuční centrály mezinárodní firmy dorazilo 150 padesátikusových balení svítících vánočních LED řetězů. Tyto ozdoby byly přebaleny do 80 menších balení po 15 kusech, která byla dodána maloobděratelům v ceně 250 Kč za jeden vánoční řetěz. Vypočti:

1. Kolik Kč utřžila centrála za řetězzy dodané maloobděratelům?

2. Kolik větších balení po 30 kusech pro obchodní řetězce je možné sestavit ze zbývajících řetězů?

max. 2 body

V zadání se s řetězzy manipuluje v krabicích o různých počtech řetězů \Rightarrow musíme sledovat počty kusů řetězů, ne krabic

Počet dodaných řetězů	...	$150 \cdot 50 = 7\,500$
Počet řetězů v malých baleních	...	$80 \cdot 15 = 1\,200$
Částka utržená za řetězzy v malých baleních	...	$1\,200 \cdot 250 = 300\,000 \text{ Kč}$

Počet zbývajících řetězů	...	$7\,500 - 1\,200 = 6\,300$
Počet balení po 30 kusech	...	$6\,300 : 30 = 210 \text{ balení}$

Za ozdoby dodané do maloobchodu firma utrží 300 000 Kč. Zbývajcí řetězzy se vejdu do 210 balení po 30 kusech.

Př. 4: Tři třináctiny financí vyčleněných na vánoční odměny byly určeny pro šest náměstků ministra, kteří představují pouhých 2,4 procenta zaměstnanců ministerstva. Zbytek peněz byl rozdělen mezi ostatní zaměstnance.

1. Urči počet zaměstnanců ministerstva (bez ministra).

2. Kolikrát byla průměrná odměna náměstka větší než průměrná odměna běžného zaměstnance?

max. 2 body

6 náměstků (náměstků)	...	2,4 %
x zaměstnanců	...	100 %

$$\frac{x}{100} = \frac{6}{2,4} \Rightarrow x = \frac{6}{2,4} \cdot 100 = 250$$

Průměrná odměna pro náměstka	...	$\frac{3}{6} = \frac{3}{13 \cdot 6} = \frac{1}{13 \cdot 2}$
------------------------------	-----	---

Průměrná odměna pro zaměstnance	...	$\frac{10}{244} = \frac{10}{13 \cdot 244} = \frac{5}{13 \cdot 122}$ (běžných zaměstnanců je $250 - 6 = 244$, jejich odměna je $1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$)
---------------------------------	-----	---

$$\text{Kolikrát je odměna náměstka větší: } \frac{\frac{1}{\frac{13 \cdot 2}{5}}}{\frac{1}{13 \cdot 122}} = \frac{122}{10} = 12,2$$

Ministerstvo má 250 zaměstnanců. Průměrná odměna náměstka je 12,2krát větší než průměrná odměna běžného zaměstnance.

Dodatek: Průměrné odměny je možné vyjádřit i rychleji: náměstek ... $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (tři díly, neřešíme velikost dílu, protože u náměstků i běžných zaměstnanců jde o třináctiny a velikost dílu se v poměru vykrátí).

Př. 5: Operátor A upozorňuje, že balíček 10 GB dat je u něj o 20 Kč levnější než u operátora B. Operátor B je hrdý na to, že balíček 20 GB u operátora A je o tři čtvrtiny dražší než jeho balíček 10 GB. Cena na 1 GB vychází u všech balíčků operátora A stejně. Vypočti v Kč ceny 10 GB dat u obou operátorů. **max. 2 body**

Cena 10 GB operátor A ... a
Cena 10 GB operátor B ... b

balíček 10 GB operátora A o 20 Kč levnější než u operátora B ... $a + 20 = b$
balíček 20 GB u operátora A je o tři čtvrtiny dražší než balíček 10 GB operátora B ...

$$2a = b + \frac{3}{4}b = \frac{7}{4}b$$

Z první rovnice dosadíme do druhé: $2a = \frac{7}{4}(a + 20) \quad | \cdot 4$

$$8a = 7a + 140 \quad | -7a$$

$$a = 140 \quad b = a + 20 = 140 + 20 = 160$$

Balíček 10 GB dat stojí u operátora A 140 Kč, u operátora B 160 Kč.

Pedagogická poznámka: Žáci si často komplikují situaci tím, že za neznámou volí cenu za 1 GB. Chyby se vyskytují v druhé rovnici, buď u zlomku $\frac{3}{4}$ zapomenou zcela, nebo nepíšou b i v případě, že kvůli volbě proměnné mají psát $10b$.

Př. 6: Pokud do třídy přijdou všichni žáci, je poměr počtu dívek ku počtu chlapců 5:4. V pondělí chyběli pouze dva chlapci a poměr obou pohlaví se změnil na 3:2. V úterý chyběli tři chlapci a tři dívky, ve středu pouze dvě dívky. Ve čtvrtek a v pátek nechyběl nikdo.

Rozhodni o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé (A) nebo nikoli (N).

1. V pondělí bylo ve třídě 12 hochů.
2. V úterý byl poměr počtu dívek ku počtu chlapců roven 4:3.
3. Ve středu bylo ve škole přítomno 14 dívek.
4. Do třídy chodí 30 žáků.

max. 2 body

Počet chlapců ... c
Počet dívek ... d

Poměr počtu dívek ku počtu chlapců je 5:4 ... $\frac{d}{c} = \frac{5}{4}$

Chyběli dva chlapci a poměr obou pohlaví se změnil na 3:2 ... $\frac{d}{c-2} = \frac{3}{2}$

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých, upravíme obě rovnice:

$$\begin{array}{l} \frac{d}{c} = \frac{5}{4} \quad / \cdot 4c \\ 4d = 5c \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{d}{c-2} = \frac{3}{2} \quad / \cdot 4 \cdot (c-2) \\ 4d = 6 \cdot (c-2) \end{array}$$

Levé strany obou rovnic se rovnají \Rightarrow musí se rovnat i pravé:

$$5c = 6 \cdot (c-2)$$

$$5c = 6c - 12 \quad / +12 - 5c$$

$$12 = c$$

$$4d = 5c \Rightarrow d = \frac{5c}{4} = \frac{5 \cdot 12}{4} = 15$$

Do třídy chodí 12 chlapců a 15 dívek.

Rozhodujeme o pravdivosti výroků:

1. V pondělí bylo ve třídě 12 hochů.

V pondělí dva žáci chyběli, ve třídě bylo $12 - 2 = 10$ hochů \Rightarrow výrok je nepravdivý.

2. V úterý byl poměr počtu dívek ku počtu chlapců roven 4:3.

V úterý chyběli tři chlapci a tři dívky $\Rightarrow \frac{\text{počet dívek}}{\text{počet chlapců}} = \frac{15-3}{12-3} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow$ výrok je pravdivý.

3. Ve středu bylo ve škole přítomno 14 dívek.

Ve středu chyběly dvě dívky \Rightarrow počet dívek $15 - 2 = 13 \Rightarrow$ výrok je nepravdivý.

4. Do třídy chodí 30 žáků.

Do třídy chodí $15 + 12 = 27$ žáků \Rightarrow výrok je nepravdivý.

Celková odpověď: 1N, 2A, 3N, 4N.

Př. 7: Dvě nádrže o objemu $1,2 \text{ m}^3$ začaly současně přečerpávat dvě různá čerpadla.

Rychlejší čerpadlo každou minutu přečerpalo o 6 litrů kapaliny více a díky tomu ukončilo činnost o deset minut dříve. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočti, kolik litrů za minutu přečerpalo pomalejší čerpadlo. **max. 3 body**

Objem nádrže: $1,2 \text{ m}^3 = 1\,200 \text{ dm}^3 = 1\,200 \text{ l}$

Počet litrů přečerpáných pomalejším čerpadlem ... x

Doba čerpání pomalejším čerpadlem ... t

Pomalejší čerpadlo vyčerpá 1 200 litrů kapaliny v nádrži ... $xt = 1\,200$

Rychlejší čerpadlo každou minutu přečerpalo o 6 litrů kapaliny více a díky tomu ukončilo činnost o deset minut dříve ... $(x+6)(t-10) = 1\,200$

Z první rovnice vyjádříme t : $xt = 1\,200 \Rightarrow t = \frac{1\,200}{x}$

Dosadíme do druhé: $(x+6)\left(\frac{1\,200}{x}-10\right) = 1\,200 \quad / \cdot x$

$$(x+6)(1\,200-10x) = 1\,200x$$

$$1\,200x - 10x^2 + 7\,200 - 60x = 1\,200x \quad / -1\,200x$$

$$-10x^2 + 7\,200 - 60x = 0 \quad / : (-10)$$

$$x^2 + 6x - 720 = 0$$

$$(x+30)(x-24) = 0$$

$$x_1 = -30 \text{ (nemá význam)} \qquad x_2 = 24$$

Pomalejší čerpadlo přečerpá 24 litrů za minutu.

Dodatek: K hledání čísel do rozkladu. Když rozkládáme trojčlen $x^2 + 6x - 720 = 0$ hledáme dvě čísla jejich součin je 720 a jejich hodnoty se liší o 6 (součin -720 získáme tak, že vynásobíme čísla s opačným znaménkem, velikost jejich součtu se tedy rovná velikosti rozdílu jejich velikostí). První nástřel: $720 = 72 \cdot 10$, čísla mají příliš velký rozdíl \Rightarrow větší číslo zmenšíme a menší zvětšíme tím, že si je obě rozložíme na součin a jedno z čísel přesuneme od většího k menšímu:
 $720 = 2 \cdot 36 \cdot 10 = 36 \cdot 20$. Rozdíl mezi čísly je stále příliš velký, další pokus s větším číslem, které můžeme vytknout z 72: $720 = 3 \cdot 24 \cdot 10 = 24 \cdot 30$. To přesně hledáme.

Př. 8: Po prvních pěti dnech se úpravou firmware podařilo zvýšit výkon automatického lisu o pětinu. Celou zakázku na výrobu 21 170 výlisků se tak podařilo splnit za 25 dní. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic urči celkový počet výrobků vyrobených po úpravě firmware. **max. 3 body**

Počet výlisků za den před úpravou ... x

Počet výrobků vyrobených za 5 dní před úpravou ... $5x$

Úpravou firmware se zvýšil výkon o pětinu ... $x + \frac{x}{5} = \frac{6}{5}x$

Počet výrobků vyrobených po úpravě ... $(25-5) \cdot \frac{6}{5}x = 20 \cdot \frac{6}{5}x = 24x$

Celou zakázku představuje 21 170 výlisků ... $5x + 24x = 21\,170$

$$29x = 21\,170 \quad / : 29$$

$$x = 730$$

Počet výlisků vyrobených po úpravě ... $24x = 24 \cdot 730 = 17\,520$

Po úpravě firmware vyrobil automatický lis 17 520 výlisků.

Př. 9: Když se na začátku prosince Petr s Michalem bavili o tom, kolik chtějí utratit za vánoční dárky, Petr plánoval o 2 000 Kč vyšší útratu. V lednu po návratu do práce zjistili, že utratili stejně, protože zatímco Petr utratil o pětinu méně, než plánoval, Michal utratil o pětinu více. Kolik každý z nich za dárky utratil? Max 3 body

Plánovaná útrata Petr ... p
 Plánovaná útrata Michal ... m
 Petr plánoval o 2 000 Kč vyšší útratu ... $p = m + 2\,000$

Skutečná útrata Petr (o pětinu méně) ... $p - \frac{p}{5} = \frac{4}{5}p$

Skutečná útrata Michal (o pětinu více) ... $m + \frac{m}{5} = \frac{6}{5}m$

Utratili stejně ... $\frac{4}{5}p = \frac{6}{5}m$

Dosadíme $p = m + 2\,000$: $\frac{4}{5} \cdot (m + 2\,000) = \frac{6}{5}m \quad | \cdot 5$

$$4 \cdot (m + 2\,000) = 6m$$

$$4m + 8\,000 = 6m \quad | -4m$$

$$8\,000 = 2m \quad | :2$$

$$m = 4\,000$$

Skutečná útrata Michal ... $\frac{6}{5}m = \frac{6}{5} \cdot 4\,000 = 4\,800$

Oba kamarádi utratili za vánoční dárky 4 800 Kč.

Matematika +

Př. 10: Všichni účastníci lyžařského výcviku si přivezli sjezdovky nebo snowboard. Počet těch, kteří mají jen jeden druh vybavení je pětkrát větší než počet těch, kteří mají sjezdovky i snowboard najednou. Jen třetina těch, kteří mají snowboard má i sjezdovky. Vyjádři zlomkem v základním tvaru, jaká část účastníků lyžařského výcviku si přivezla oba druhy vybavení. **1 bod**

Část účastníků s obojím vybavením ... o

Část účastníků, kteří mají pouze lyže ... l

Část účastníků, kteří mají pouze snowboard ... s

Všichni účastníci lyžařského výcviku si přivezli sjezdovky nebo snowboard ...

$$o + l + s = 1$$

Počet těch, kteří mají jen jeden druh vybavení je pětkrát větší než počet těch, kteří mají sjezdovky i snowboard najednou ... $s + l = 5o$

Jen třetina těch, kteří mají snowboard má i sjezdovky ... $\frac{1}{3}(s + o) = o$

Upravíme třetí rovnici: $\frac{1}{3}(s + o) = o \quad | \cdot 3$

$$s + o = 3o \quad / -o$$

$$s = 2o$$

$$\text{Dosadíme do 2. rovnice: } s + l = 5o \Rightarrow 2o + l = 5o \quad / -2o$$

$$l = 3o$$

$$\text{Dosadíme za } l \text{ a } s \text{ do 1. rovnice: } o + l + s = o + 3o + 2o = 6o = 1 \quad / :6$$

$$o = \frac{1}{6}$$

Jedna šestina účastníků lyžařského kurzu si přivezla snowboard i lyže.

Př. 11: Klára, Lenka a Mirka se společně strávily sobotní odpoledne v nákupním centru píděním po zajímavých kouscích, které by ozdobily jejich šatníky. Lenka s Mirkou si na nákupy připravily dohromady 5680 Kč. Lenka tak měla v peněžence o pětinu více než Klára, Klára pak o sedminu méně než Mirka.

Po ukončení nákupů sis dívky nechaly peněženky s neutracenými penězi v Lenčině batohu, který při vystupování nechaly ve vagónu metra a který už se nenašel. Tři kamarádky tak přišly dohromady o částku, která se rovnala čtvrtině toho, co dohromady zaplatily za všechny nákupy.

Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočti v korunách:

1) částku, kterou si vzala na nákupy Klára,

2) částku, kterou zapomněly v batohu.

V záznamovém archu uveď v obou částech úlohy celý postup řešení. **max. 3 body**

Částka, kterou si připravila:

Klára ... k

Lenka ... l

Mirka ... m

Lenka s Mirkou si na nákupy připravily dohromady 5680 Kč ... $l + m = 5680$

Lenka tak měla v peněžence o pětinu více než Klára ... $l = \frac{6}{5}k$

Klára pak o sedminu méně než Mirka ... $k = \frac{6}{7}m$

Ze třetí rovnice si vyjádříme m a dosadíme do 1. rovnice:

$$k = \frac{6}{7}m \Rightarrow m = \frac{7}{6}k$$

$$\frac{6}{5}k + \frac{7}{6}k = 5680 \quad / \cdot 5 \cdot 6$$

$$36k + 35k = 30 \cdot 5680$$

$$71k = 170\,400 \quad / : 71$$

$$k = 2400$$

Dopočteme peníze u zbývajících kamarádek:

$$l = \frac{6}{5}k = \frac{6}{5} \cdot 2\,400 = 2\,880$$

$$m = \frac{7}{6}k = \frac{7}{6} \cdot 2\,400 = 2\,800$$

Celková částka za všechny tři kamarádky: $2\,400 + 2\,880 + 2\,800 = 8\,080$ Kč

přišly dohromady o částku, která se rovnala čtvrtině toho, co dohromady zaplatily za všechny nákupy:

Ztracená částka ... x

Částka utracená za nákupy .. $4x$

$$x + 4x = 5x = 8\,080$$

$$x = 1\,616 \text{ Kč.}$$

Petra si na útraty připravila 2 400 Kč, v batohu dívky ztratily 1 616 Kč.

Shrnutí: