

11.2.12 Slovní úlohy II

Předpoklady:

Ukázka manuálu pro opravování typické slovní úlohy ve státní maturitě:

14	<p style="text-align: center;">Každý brigádník dostal 2 800 Kč.</p> <p style="text-align: center;">a postup řešení</p> <p style="text-align: center;">(tj. správně sestavená a správně řešená rovnice, resp. soustava rovnic, a správný výpočet požadované veličiny)</p>	max. 3 b.
		3 b.
	<p>Je správně sestavena rovnice, resp. soustava rovnic, z níž lze dopočítat požadovanou veličinu a v následném postupu řešení je právě jeden z následujících nedostatků:</p> <ul style="list-style-type: none"> - po správném výpočtu některé z neznámých chybí dopočítání požadované veličiny, resp. požadovaná odpověď, - rovnice je řešena s jednou numerickou chybou a dále je úloha bezchybně dokončena. 	2 b.
	<p>Je správně sestavena rovnice, resp. soustava rovnic, z níž lze dopočítat požadovanou veličinu, ale následuje alespoň jeden z těchto nedostatků:</p> <ul style="list-style-type: none"> - rovnice není řešena, resp. její řešení není dokončeno, a neznámá není vypočtena, - rovnice je řešena se závažnou chybou nebo s více chybami, - bez uvedení postupu řešení rovnice jsou uvedeny správné výsledky, které byly získány jiným způsobem (např. aproximací), - výsledek neodpovídá uvedenému postupu řešení. <p>Není sestavena správná rovnice, resp. soustava rovnic, správné výsledky jsou získány úvahou a jsou ověřeny zkouškou do zadání. Úvaha musí být srozumitelně popsána.</p>	1 b.
<p>Není sestavena správná rovnice, resp. soustava rovnic, a následuje alespoň jeden z těchto nedostatků:</p> <ul style="list-style-type: none"> - úvaha vedoucí k získání správných výsledků není srozumitelně popsána, - výsledky bez postupu řešení (zkouška do zadání nelze považovat za postup řešení), - řešení chybnou úvahou, - chybné nebo chybějící výsledky. 	0 b.	

Postřeh: Pokud chceme ve slovní úloze požadující řešení pomocí rovnic získat alespoň, nezbyvá v podstatě nic jiného než správně sestavit rovnice. Jediná jiná možnost, jak získat alespoň něco, je vyřešit celý příklad úvahou, dobře ji popsat a ověřit dosazením do zadání.

Pár poznámek k řešení slovních úloh

- Během prvního čtení neřešíme žádná konkrétní čísla, snažíme se představit si situaci a zjistit, co máme spočítat.
- Pokud nevím, jak se dostat k výsledku, zkusíme spočítat jiné smysluplné hodnoty, od kterých pak může být k výsledku jen kousek.
- Pokud pro výpočty potřebujeme hodnoty, které v zadání nejsou uvedeny, zavedeme proměnnou.
- Proměnné si značíme písmeny, která naznačují jejich význam. Dobře si rozmyslíme, co přesně znamenají.
- Proměnných můžeme zvolit klidně víc a pak jejich počet zmenšujeme pomocí dalších rovnic a vzájemného dosazování.
- Každá rovnice musí jít přečíst slovy tak, aby dávala reálný význam.
- Každá informace ze zadání většinou odpovídá nějaké rovnici.

- Rovnice většinou porovnává dvě množství. Nejúčinnější je zapsat obě množství zvlášť a pak doplnit vztah na rovnost.
- Příklad se nemusí řešit „najednou“ okamžitým sestavením rovnice s jednou neznámou z jedné vody. Naopak lepší je postupně využívat informace ze zadání a zbavovat se přebytečných písmen v rovnicích.

Př. 1: V oktávě z 28 žáků maturuje 17 z matematiky a 12 z fyziky. Jen 9 žáků nematuruje ani z jednoho z těch dvou předmětů. Vypočti, kolik žáků maturuje z matematiky i fyziky. **1 bod**

$28 - 9 = 19 \Rightarrow$ 19 studentů maturuje z matematiky nebo fyziky

$17 + 12 = 29 \Rightarrow$ součet počtu studentů, kteří maturují z matematiky a počtu studentů, kteří maturují z fyziky je 10 větší než počet studentů, kteří maturují z matematiky nebo fyziky \Rightarrow 10 studentů je započítáno dvakrát (maturují z obou předmětů)

10 studentů maturuje z matematiky i fyziky.

Dodatek: Předchozí příklad je klasickou ukázkou toho, že má cenu počítat smysluplné hodnoty, které nemáme určit, ale ze kterých se snadno můžeme dostat k výsledku. Mnoho žáků si s příkladem neví rady, jakmile jim podaří spočítat hodnoty 19 a 29, je jim cesta k výsledku jasná.

Pedagogická poznámka: Jiný způsob řešení:

$28 - 9 = 19 \Rightarrow$ 19 studentů maturuje z matematiky nebo fyziky,

$19 - 17 = 2 \Rightarrow$ 2 studenti maturují z fyziky a nematurují z matematiky,

$12 - 2 = 10 \Rightarrow$ 10 studentů maturuje z obou předmětů.

Analogicky:

$28 - 9 = 19 \Rightarrow$ 19 studentů maturuje z matematiky nebo fyziky,

$19 - 12 = 7 \Rightarrow$ 7 studentů maturuje z matematiky a ne z fyziky,

$17 - 7 = 10 \Rightarrow$ 10 studentů maturuje z obou předmětů.

Ukazujeme si jednu variantu a chci po žácích, aby přišli na druhou.

Pedagogická poznámka: Příklad je možné řešit pomocí Venových diagramů (hodina 010306).

Př. 2: Všichni zaměstnanci školy si z FKSP nechávají proplácet alespoň jeden ze dvou nejoblíbenějších příspěvků – příspěvek na školní obědy nebo příspěvek na penzijní připojištění. Čtvrtina těch, kteří pobírají příspěvek na obědy pobírá také příspěvek na penzijní připojištění. Polovina těch, kteří pobírají příspěvek na penzijní připojištění, pobírá i příspěvek na obědy. Jaká část zaměstnanců pobírá oba příspěvky? **1 bod**

Část zaměstnanců, kteří pobírají oba typy příspěvků ... x

Potřebujeme vyjádřit pomocí x kolik zaměstnanců pouze pobírá příspěvek nebo pouze bere příspěvek na obědy.

Čtvrtina těch, kteří pobírají příspěvek na obědy pobírá také příspěvek na penzijní připojištění

\Rightarrow je třikrát více těch zaměstnanců, kteří pouze příspěvek na obědy, než těch, kteří pobírají

oba příspěvky \Rightarrow pouze příspěvek na obědy pobírá ... $3x$

Polovina těch, kteří pobírají příspěvek na penzijní připojištění, pobírá i příspěvek na obědy
 \Rightarrow pouze příspěvek na obědy pobírá ... x
 Všichni zaměstnanci pobírají alespoň jeden příspěvek ... $x + 3x + x = 1$ (tři zapsané skupiny dohromady dají celek zaměstnanců).

$$5x = 1 \quad / : 5$$

$$x = \frac{1}{5}$$

Oba typy příspěvku pobírá pětina všech zaměstnanců.

Př. 3: Podnikatel pro splnění zakázky upravil 15 strojů, které měly splnit zakázku za 60 směn. Před spuštěním výroby, ale už po úpravě strojů zákazník část objednávky, kterou by 4 stroje naplnily za 45 směn zrušil. Za každou zrušenou směnu jednoho stroje zaplatil zákazník smluvní pokutu 1500 Kč. Vypočti:

1. Kolik Kč zaplatil zákazník na smluvní pokutě?
 2. Za kolik směn splní podnikatel zakázku, pokud využije všech 15 upravených strojů?
- max. 2 body**

Původní velikost zakázky	...	$15 \cdot 60 = 900$ směn 1 stroje
Zrušená část zakázky	...	$4 \cdot 45 = 180$ směn 1 stroje
Smluvní pokuta	...	$1500 \cdot 180 = 270\,000$
Velikost zbývajících zakázky	...	$900 - 180 = 720$ směn jednoho stroje
Počet směn	...	$720 : 15 = 48$ dní

Zákazník zaplatí smluvní pokutu 270 000 Kč. Všechny 15 upravených strojů dokončí zbytek zakázky za 48 dní.

Pedagogická poznámka: S příkladem mají žáci obrovské problémy. Po vyřešení příkladu upozorňuji, že podstata příkladu je stejná jako u příkladu 3 v minulé hodině. Bavíme o povrchové a hloubkové struktuře problému.

Př. 4: Na škole se týdně odučí 540 hodin. Když tři učitelé na týden odjedou na školení, zvýší se počet hodin, které každý učitel na škole průměrně odučí o dvě. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočti kolik má škola učitelů. V záznamovém archu uveď celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení, odpověď). **max. 3 body**

Počet učitelů	...	u
Průměrný počet odučených hodin	...	h
Na škole se odučí 540 hodin	...	$uh = 540$
Počet učitelů po odjezdu 3 z nich	...	$u - 3$
Zvýšení průměr odučených hodin	...	$h + 2$
Na škole se odučí 540 hodin	...	$(u - 3)(h + 2) = 540$
Upravujeme druhou rovnici:		$uh + 2u - 3h - 6 = 540$
Dosadíme $uh = 540$:		$540 + 2u - 3h - 6 = 540$

$$2u = 3h + 6 \Rightarrow u = \frac{3}{2}h + 3$$

Dosadíme do první rovnice: $\left(\frac{3}{2}h + 3\right)h = 540$

$$\frac{3}{2}h^2 + 3h = 540 \quad /: \frac{3}{2}$$

$$h^2 + 2h = 360$$

$$h^2 + 2h - 360 = 0$$

$$(h + 20)(h - 18) = 0$$

$$h_1 = -20 \text{ - bez reálného významu}$$

$$h_2 = 18 \quad u = \frac{3}{2}h + 3 = \frac{3}{2} \cdot 18 + 3 = 27 + 3 = 30$$

Normálně na škole 30 učitelů průměrně učí 18 hodin týdně.

Pedagogická poznámka: Opět jde o analogii příkladu z minulé hodiny – tentokrát příkladu 4.

Př. 5: Ve škole je o polovinu více dívek než chlapců. Průměrná výška dívek je 168 cm, chlapců 179 cm. Jaká je průměrná výška všech žáků školy?

A) 172,4 cm B) 172,6 cm C) 172,9 cm D) 173,2 cm

E) 173,5 cm

2 body

Chlapců není ve škole stejný počet \Rightarrow nemůžeme spočítat průměrnou výšku žáka školy jako prostý průměr z průměru chlapců a průměru dívek \Rightarrow musíme zohlednit počet dívek a chlapců.

Počet chlapců ve škole ... n

Dívek je o polovinu více než chlapců .. $n + \frac{n}{2} = \frac{3}{2}n$

$$\text{Počítáme vážený průměr: } \frac{\frac{3}{2}n \cdot 168 + n \cdot 179}{\frac{3}{2}n + n} = \frac{252n + 179n}{\frac{5}{2}n} = \frac{431n}{\frac{5}{2}n} = \frac{431 \cdot 2}{5} = 172,4 \text{ cm}$$

Správná je možnost A).

Př. 6: Na zkušební okruhu tvaru kružnice se testuje vlaková souprava, kterou tvoří lokomotiva a čtyři vagóny. Souprava objede celý okruh stálou rychlostí za 8 minut a 22 sekund. Po celou dobu jízdy tak ujede rychlostí, při které urazí 1 km za 40 s.

Rozměry soupravy neuvažuj. Při výpočtech soupravu nahraď jedním bodem.

Vypočti v metrech:

1. vzdálenost, kterou urazí souprava při projetí jednoho celého okruhu (tedy za 8 minut 22 s).

2. vodorovnou vzdušnou vzdálenost mezi kontrolními stanicemi, které rozdělují

okruh na dvě stejné poloviny. Výsledek zaokrouhli na stovky metrů.
V záznamovém archu uveď v obou částech úlohy celý postup řešení. **max. 2 body**

Nejdříve určíme rychlost soupravy.

$$40 \text{ s} \quad \dots \quad 1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$$

$$1 \text{ s} \quad \dots \quad 1\,000 : 40 = 25 \text{ m}$$

\Rightarrow vlak jede rychlostí 25 m/s.

$$8 \text{ minut } 22 \text{ s} = 8 \cdot 60 + 22 = 502 \text{ s}$$

$$502 \text{ s} \quad \dots \quad 502 \cdot 25 = 12\,550 \text{ m}$$

Vzdálenost mezi kontrolními stanicemi představuje průměr kružnice, po které souprava jezdí. Její obvod je roven 12 550 m (vzdálenost, kterou urazí souprava za jednu otáčku).

$$o = 2\pi r = \pi d \Rightarrow d = \frac{o}{\pi} = \frac{12\,550}{\pi} = 3\,994 \doteq 4\,000 \text{ m}$$

Pop projetí jednoho okruhu souprava urazí 12 550 m, vzdálenost mezi kontrolními stanicemi je přibližně 4 000 m.

Př. 7: Stánkař měl ráno připraveno 500 malých a 400 velkých pomlázek. Při večerní kontrole zjistil, že prodal třikrát více malých pomlázek a tak mu zbylo o 116 velkých pomlázek více. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočti, kolik

1. malých pomlázek prodal,
2. kolik pomlázek mu večer zbylo.

max. 3 body

$$\text{Počet prodaných velkých pomlázek} \quad \dots \quad v$$

$$\text{Počet prodaných malých pomlázek} \quad \dots \quad 3v$$

$$\text{Počet zbylých velkých pomlázek} \quad \dots \quad 400 - v$$

$$\text{Počet zbylých malých pomlázek} \quad \dots \quad 500 - 3v$$

$$\text{Zbylo o 116 velkých pomlázek více} \quad \dots \quad 400 - v = 500 - 3v + 116 \quad / +3v - 400$$

$$2v = 216 \quad / : 2$$

$$v = 108$$

$$3v = 3 \cdot 108 = 324 \text{ - počet prodaných malých pomlázek.}$$

$$\text{Počet zbylých velkých pomlázek} \quad \dots \quad 400 - v = 400 - 108 = 292$$

$$\text{Počet zbylých malých pomlázek} \quad \dots \quad 500 - 3v = 500 - 324 = 176$$

$$\text{Počet zbylých pomlázek} \quad \dots \quad 292 + 176 = 468$$

Stánkař prodal 324 malých pomlázek. Večer mu zbylo celkově 468 pomlázek.

Př. 8: Po každém dotažení zajišťovací matice o 360 stupňů se frekvence otáčení motoru kvůli zvýšenému tření snížila o pětinu. Po dvou dotažení tak frekvence klesla o 18 Hz. Po třech dotaženích se frekvence motoru snížila natolik, že shořeno vynutí a motor byl zničen. Vypočti,

1. základní frekvenci otáčení motoru, se kterou se otáčel než obsluha zahájila dotahování zajišťovací matice,
2. frekvenci otáčení motoru, při které došlo k jeho zničení.

max. 2 body

$$\text{Původní frekvence otáčení} \quad \dots \quad f$$

Po otočení o 360° se frekvence snížila o pětinu .. $f_1 = \frac{4}{5}f$

Po druhém otočení o 360° se frekvence snížila o pětinu .. $f_2 = \frac{4}{5}f_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}f = \frac{16}{25}f$

Rozdíl původní frekvence a frekvence po druhém otočení: $f - \frac{16}{25}f = \frac{9}{25}f = 18$

$$\frac{9}{25}f = 18 \quad / \cdot \frac{25}{9}$$
$$f = 50 \text{ Hz}$$

Frekvence po druhém utažení ... $50 - 18 = 32 \text{ Hz}$

Po třetím otočení o 360° se frekvence snížila o pětinu .. $f_3 = \frac{4}{5}f_2 = \frac{4}{5} \cdot 32 = 25,6 \text{ Hz}$

Motor se před dotahováním zajišťovací matice točil s frekvencí 50 Hz. Shořel po třech dotaženích při frekvenci otáčení 25,6 Hz.

Př. 9: 15 kg balení bílé barvy stojí 862 Kč, 40 kg balení je možné koupit za 1915 Kč. Malíř za rok nakoupil celkem 1185 kg barvy, za kterou utratil 57 739 Kč. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočti kolik balení barvy za rok nakoupil. V záznamovém archu uveď celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení, odpověď). **max. 3 body**

počet 15 kg balení ... p

počet 40 kg balení ... c

nakoupil celkem 1185 kg: $15p + 40c = 1185$ (p balení o 15 kg váží $15p$ kg)

utratil 57 739 Kč: $862p + 1915c = 57\,739$ (p balení po 862 Kč stojí $862p$ Kč)

$$15p + 40c = 1185 \quad / : 5$$

$$3p + 8c = 237 \Rightarrow p = \frac{237 - 8c}{3}$$

Dosadíme do druhé rovnice: $862 \cdot \frac{237 - 8c}{3} + 1915c = 57\,739 \quad / \cdot 3$

$$862 \cdot (237 - 8c) + 5\,745c = 173\,217$$

$$204\,294 - 6\,896c + 5\,745c = 173\,217$$

$$31\,077 - 1\,151c = 0$$

$$31\,077 = 1\,151c \quad / : 1\,151$$

$$c = 27 \quad p = \frac{237 - 8c}{3} = \frac{237 - 8 \cdot 27}{3} = 7$$

Malíř koupil 27 balení 40 kg a 7 balení 15 kg bílé barvy.

Př. 10: Začínající podnik QuickTest na výrobu lékařských testů sehnal výhodnou zakázku. Jeho výrobní kapacita však dokáže v termínu pokrýt pouze polovinu poptávaných testů. QuickTest proto nabídl spoluúčast na zakázce větší konkurenční firmě BigTest, jejíž kapacita v požadovaném termínu je o 160 000 kusů testů vyšší. Obě firmy se na spolupráci nakonec dohodly s tím, že každá využije na zakázku polovinu své výrobní kapacity. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočti v kusech

1. výrobní kapacitu firmy QuickTest.
2. počet testů, které při naplnění zakázky vyrobí firma BigTest.

V záznamovém archu uveď celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď). **max. 3 body**

Výrobní kapacita firmy QuickTest ... q
 Výrobní kapacita firmy BigTest ... b
 Počet testů tvořících zakázku ... n

výrobní kapacita QuickTest dokáže pokrýt pouze polovinu testů ... $n = 2q$

Výrobní kapacita BigTest je o 160 000 kusů testů vyšší než u QuickTest ...
 $b = q + 160\,000$

že každá využije na zakázku polovinu své výrobní kapacity ... $n = \frac{q}{2} + \frac{b}{2}$

Z první a druhé rovnice dosadíme do třetí: $n = \frac{q}{2} + \frac{b}{2} \Rightarrow 2q = \frac{q}{2} + \frac{q + 160\,000}{2} \quad | \cdot 2$

$$4q = q + q + 160\,000$$

$$2q = 160\,000 \quad | : 2$$

$$q = 80\,000$$

Výrobní kapacita firmy QuickTest je 80 000 testů.

$$b = q + 160\,000 = 80\,000 + 160\,000 = 240\,000$$

$$\frac{b}{2} = \frac{240\,000}{2} = 120\,000$$

Firma BigTest vyrobila při naplnění zakázky 120 000 testů.

Matematika plus

Př. 11: Třetí mocnina neznámého čísla je o 8 menší než dvojnásobek druhé mocniny součtu tohoto neznámého čísla s číslem 2. Vypočti neznámé číslo. Najdi všechna řešení. V záznamovém archu uveď celý postup řešení. **max. 2 body**

Neznámé číslo ... n

dvojnásobek druhé mocniny součtu tohoto neznámého čísla s číslem 2 ... $2 \cdot (n + 2)^2$

Třetí mocnina neznámého čísla je o 8 menší než dvojnásobek druhé mocniny součtu tohoto neznámého čísla s číslem 2 ... $n^3 + 8 = 2 \cdot (n + 2)^2$

$$n^3 + 8 = 2 \cdot (n^2 + 4n + 4)$$

$$n^3 + 8 = 2n^2 + 8n + 8 \quad | -(2n^2 + 8n + 8)$$

$$n^3 - 2n^2 - 8n = n(n^2 - 2n - 8) = n(n - 4)(n + 2)$$

$$n_1 = 0, n_2 = 4, n_3 = -2$$

Neznámým číslem mohou být čísla -2, 0, 4.

Př. 12: Jirka vede skauty. Při přípravě hry pro svůj oddíl nařezal na 13 stejných kousků tyč, kterou našel u táty na zahradě. Po skončení hry všechny kousky přiložil na oheň. Po týdnu se táta začal po tyči shánět. Jirka si bohužel nepamatuje, jak byla tyč dlouhá. Pamatuje si, že její délka byla celé číslo v dm, když se během hry vyskládaly 4 kousky tyče za sebe, vznikla řada delší než 5 dm a kratší než 6 dm, a když se stejným způsobem vyskládalo kousků 5, byla řada delší než 6 dm a kratší než 7 dm. Urči délku celé tyče před nařezáním. **max. 2 body**

Délka tyče ... d

Délka kousku tyče ... $\frac{d}{13}$

Délka čtyř kousků tyče ... $4 \cdot \frac{d}{13}$

4 kousky tyče za sebe, vznikla řada delší než 5 dm a kratší než 6 dm ... $5 < 4 \cdot \frac{d}{13} < 6$

kousků 5 za sebou, byla řada delší než 6 dm a kratší než 7 dm ... $6 < 5 \cdot \frac{d}{13} < 7$

Máme celkem čtyři nerovnice, všechny vyřešíme a výsledkem jsou všechna přirozená čísla v průniku všech čtyřech nerovnic.

$$\begin{array}{cccccc} 5 < 4 \cdot \frac{d}{13} & / \cdot \frac{13}{4} & 4 \cdot \frac{d}{13} < 6 & / \cdot \frac{13}{4} & 6 < 5 \cdot \frac{d}{13} & / \cdot \frac{13}{6} & 5 \cdot \frac{d}{13} < 7 & / \cdot \frac{13}{5} \\ \frac{5 \cdot 13}{4} < d & & d < \frac{6 \cdot 13}{4} & & \frac{6 \cdot 13}{5} < d & & d < \frac{7 \cdot 13}{5} & \\ 16,25 < d & & d < 19,5 & & 15,6 < d & & d < 18,2 & \end{array}$$

Všem čtyřem nerovnicím vyhovují přirozená čísla 17 a 18.

Délka tyče před nařezáním byla 17 nebo 18 dm.

Shrnutí: