9.1.6 Permutace I

Předpoklady: 9101, 9102, 9104

Pedagogická poznámka: První tři příklady jsou opakování, je možné je přeskočit, nebo použít na zkoušení.

Př. 1: Vyřeš slovní úlohy.
a) Na plese se losuje 5 různých nejskvělejších cen z 300 lístků. Kolika způsoby může losování dopadnout?
b) Do závodu odstartovalo 23 závodníků. Kolika způsoby se mohou závodníci umístit na prvních šesti bodovaných místech?

a) Na plese se losuje 5 různých nejskvělejších cen z 300 lístků. Kolika způsoby může losování dopadnout?
Vybíráme 5 z 300, záleží na pořadí $\Rightarrow$ $V_5(300) = 300 \cdot 299 \cdot 298 \cdot 297 \cdot 296 \doteq 2{,}35 \cdot 10^{12}$ možností.

b) Do závodu odstartovalo 23 závodníků. Kolika způsoby se mohou závodníci umístit na prvních šesti bodovaných místech?
Vybíráme 6 z 23, záleží na pořadí $\Rightarrow$ $V_6(23) = 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 72\,681\,840$ možností.

Př. 2: Rozepiš.
a) $V_3(n+1)$ b) $V_2(k-1)$

a) $V_3(n+1) = (n+1) \cdot n \cdot (n-1)$
b) $V_2(k-1) = (k-1)(k-2)$

Př. 3: Z množiny dnů v týdnu vytvoř:
a) jednu trojčlennou variaci, b) dvě dvojčlenné variace.

a) jedna trojčlenná variace
Jakákoliv uspořádaná trojice dnů: $\{neděle, pátek, úterý\}$.

b) dvě dvojčlenné variace
Jakékoliv dvě uspořádané dvojice dnů: $\{pátek, úterý\}$, $\{neděle, středa\}$.

Př. 4: Sportovního turnaje se účastní 5 družstev. Kolik existuje možných konečných pořadí?

Budeme postupně sestavovat pořadí:
1. místo … 5 možností
2. místo … 4 možnosti (jeden tým už má určené pořadí)
3. místo … 3 možnosti (dva týmy už mají určené pořadí)
4. místo … 2 možnosti (tři týmy už mají určené pořadí)

5. místo … 1 možnost (čtyři týmy už mají určené pořadí)
$\Rightarrow$ jakoukoliv možnost můžeme kombinovat s ostatními $\Rightarrow$ násobíme mezi sebou $\Rightarrow$ celkem existuje $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ možností, jak může vypadat konečné pořadí (vlastně jde o vytváření uspořádané pětice z pěti prvků).

Př. 5: Kolika způsoby se může seřadit při rozlosování do řady 10 dětí na letním táboře?

Děti, které stavíme do řady, budeme postupně vybírat na místa v řadě:
1. místo … 10 možností,
2. místo … 9 možností (jedno dítě už je vybráno),
3. místo … 8 možností (dvě děti už jsou vybrány),
…
9. místo … 2 možnosti (osm dětí je vybraných),
10. místo … 1 možnost (devět dětí už je vybraných).

$\Rightarrow$ Jakoukoliv možnost můžeme kombinovat s ostatními $\Rightarrow$ násobíme mezi sebou $\Rightarrow$ celkem existuje $10 \cdot 9 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$ možností, jak může vypadat konečné pořadí (vlastně jde o vytváření uspořádané desetice z deseti prvků).

Př. 6: Tři obětovaní studenti losují o pořadí, ve kterém se nechají „dobrovolně" vyzkoušet. Kolika způsoby může losování skončit?

Stejné jako předchozí příklady, vybíráme postupně na jednotlivá místa v pořadí:
1. místo … 3 možnosti,
2. místo … 2 možnosti (jeden student vybrán),
3. místo … 1 možnost (dva studenti vybráni).

$\Rightarrow$ Jakoukoliv možnost můžeme kombinovat s ostatními $\Rightarrow$ násobíme mezi sebou $\Rightarrow$ celkem existuje $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností, jak může vypadat konečné pořadí (vlastně jde o vytváření uspořádané trojice ze tří prvků).

Př. 7: Najdi společné rysy tří předchozích příkladů.

Všechny předchozí příklady jsou skoro stejné:
- máme *n* prvků,
- z nich postupně vybíráme *n* prvků,
- z prvků sestavujeme *n*-tici,
- záleží na pořadí,
- prvky se neopakují,

n-tice, které jsme sestavovali, se nazývají **permutace z *n* prvků**.

Permutace z *n* prvků je uspořádaná *n*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

Př. 8: Jaký je vztah mezi permutacemi z *n* prvků a variacemi?

- Permutace: z *n* prvků sestavujeme upořádanou *n*-tici (používáme všechny prvky právě jednou),
- Variace: z *n* prvků sestavujeme upořádanou *k*-tici (používáme některé prvky maximálně jednou),

$\Rightarrow$ permutace je speciální případ variace (*n* členné variace z *n* prvků).

Permutace z *n* prvků je každá *n*-členná variace z těchto prvků.

Př. 9: Urči počet permutací z *n* prvků.

Vytváříme uspořádanou *n*-tici z *n* prvků:
1. člen: n možností,
2. člen: $n-1$ možností,
3. člen: $n-2$ možností,
…
$(n-1)$-ní člen: 2 možnosti,
n-tý člen: 1 možnost.
Možnosti kombinujeme: $n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$.

Mohli bychom také použít variační číslo: $V_n(n)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1$.

Počet permutací z *n* prvků značíme $P(n)$.
Součin $n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ patří v kombinatorice k nejběžnějším $\Rightarrow$ zavádíme pro něj speciální symbol $n!$ (čteme *n* faktoriál).

Pro každé přirozené číslo *n* definujeme $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.
Počet $P(n)$ všech permutací z *n* prvků se rovná $P(n)=n!$.

Hodnota faktoriálu je definována i pro nulu. Platí: $0!=1$.

Pedagogická poznámka: Hodnota faktoriálu je pro studenty překvapivá, více se dozví příští hodinu.

Většina kalkulaček má speciální tlačítko pro faktoriál.

Př. 10: Rozepiš a vypočti:
a) $P(5)$ b) $P(1)$ c) $P(3)$ d) $4!$ e) $50!$

a) $P(5)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ b) $P(1)=1$
c) $P(3)=3\cdot 2\cdot 1=6$ d) $4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$
e) $50!=50\cdot 49\cdot 48\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=$
$=30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000$

Faktoriály jsou velmi brzo velmi velká čísla.

Př. 11: Vypiš všechny permutace ze tří prvků $\{a;b;c\}$.

Vypisujeme přehledně podle prvního prvku:

(a,b,c), (a,c,b)

(b,a,c), (b,c,a)

(c,a,b), (c,b,a)

Počet permutací pomocí vzorce: $P(3)=3!=6 \Rightarrow$ odpovídá.

Pedagogická poznámka: Jako nejvýhodnější vidím společné (pomalé a po krocích, ale bez delšího čekání na samostatný nápad studentů) vyřešení příkladu 8 a poté samostatnou práci na příkladu 9.

Př. 12: Televizního pořadu, ve kterém diváci kladou politikům nepříjemné otázky, se účastní i občané Nora, Oldřich, Pavlína, Radek, Stanislav, Tamara a Uršula. Každý účastník může položit jednu otázku. Urči počet všech možných pořadí, ve kterých:
a) mohou položit své dotazy,
b) položí dotazy nejdříve ženy a pak muži,
c) položí svůj dotaz Pavlína a hned po ní Radek,
d) Nora položí svůj dotaz dřív než Tamara.

a) všechna pořadí, ve kterých mohou položit své dotazy
Stejný příklad jako všechny na začátku: $P(7)=7!=5040$.

b) všechna pořadí, ve kterých položí dotazy nejdříve ženy a pak muži

- Otázky pokládají 4 ženy $\Rightarrow$ $4!$ možností, jak je seřadit,
- otázky pokládají 3 muži $\Rightarrow$ $3!$ možností, jak je seřadit,

ke každému pořadí žen můžeme vystřídat všechna pořadí mužů a obráceně $\Rightarrow$ počty možností mezi sebou násobíme $\Rightarrow$ $4!\cdot 3!=144$ možností.

c) všechna pořadí, ve kterých položí svůj dotaz Pavlína a hned po ní Radek
Pavlínu a Radka můžeme považovat za jediného účastníka diskuse $\Rightarrow$ diskuse se účastní 6 tazatelů $\Rightarrow$ $6!=720$ možností.

d) všechna pořadí, ve kterých Nora položí svůj dotaz dřív než Tamara
Každému pořadí, ve kterém položila Nora dotaz před Tamarou, odpovídá jedno pořadí, ve kterém pouze prohodíme tyto dvě ženy a Tamara bude klást dotaz před Norou $\Rightarrow$ hledaná pořadí tvoří přesně polovinu všech $\Rightarrow$ je jich $\frac{7!}{2}=2520$.

Př. 13: Šíleně smutnou princeznu přišlo rozesmát 20 kejklířů, 35 komiků, 41 šašků, 27 zpěváků, 12 bavičů, Zlatovláska, Kocour v botách a Hloupý Honza. Urči počet všech pořadí, ve kterých mohou před princeznu předstoupit:

a) všichni uchazeči,
b) pouze kejklíři a šašci,
c) pouze komici a po nich zpěváci,
d) nejdříve všichni baviči,
e) každá skupina uchazečů pohromadě, pohádkové bytosti na konci,
f) první Zlatovláska, druhý Kocour v botách a třetí Hloupý Honza,
g) všichni uchazeči tak, aby byl Hloupý Honza první nebo druhý,
h) všichni uchazeči tak, aby Kocour v botách nebyl první,
i) všichni uchazeči tak, aby Hloupý Honza byl nejhůře desátý,
j) Zlatovláska před Hloupým Honzou a Kocourem v botách, ostatní libovolně.

a) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit všichni uchazeči
Celkově uchazečů $20+35+41+27+12+1+1+1=138$.
Všech 138 uchazečů se snažíme uspořádat, každého vybíráme pouze jednou na pořadí záleží $\Rightarrow$ $138! \doteq 6,9\cdot 10^{236}$ možností.

b) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit pouze kejklíři a šašci

- Počet kejklířů a šašků: $20+41=61$.

Uspořádáme 61 uchazečů: $61! \doteq 5,1\cdot 10^{83}$ možností.

c) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit pouze komici a po nich zpěváci

- Počet pořadí komiků: $35!$,
- počet pořadí zpěváků: $27!$,

ke každému pořadí komiků můžeme vyzkoušet všechna pořadí zpěváků $\Rightarrow$ násobíme mezi sebou $\Rightarrow$ $35!\cdot 27! \doteq 1,1\cdot 10^{68}$ možností.

d) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit nejdříve všichni baviči

- Počet pořadí bavičů: $12!$,
  počet pořadí ostatních uchazečů: $(138-12)!=126!$,

ke každému pořadí bavičů můžeme vyzkoušet všechna pořadí ostatních uchazečů $\Rightarrow$ násobíme mezi sebou $\Rightarrow$ $12!\cdot 126! \doteq 1,5\cdot 10^{224}$ možností.

e) počet všech pořadí, ve kterých může předstoupit každá skupina uchazečů pohromadě, pohádkové bytosti na konci

- Počet pořadí kejklířů: $20!$,
- počet pořadí komiků: $35!$,
- počet pořadí šašků: $41!$,
- počet pořadí zpěváků: $27!$,
- počet pořadí bavičů: $12!$,
- počet pořadí pohádkových bytostí: $3!$,

ke každému pořadí jedné skupiny můžeme vyzkoušet všechna pořadí ostatních skupin $\Rightarrow$ násobíme mezi sebou $\Rightarrow$ $20!\cdot 35!\cdot 41!\cdot 27!\cdot 12!\cdot 3!$ možností,
máme celkem 5 skupin (pohádkové bytosti jsou poslední, nikam je nepřeřazujeme), jejich pořadí můžeme měnit $5!$ způsoby $\Rightarrow$ $5!\cdot 20!\cdot 35!\cdot 41!\cdot 27!\cdot 12!\cdot 3! \doteq 1,9\cdot 10^{148}$ možností.

f) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit první Zlatovláska, druhý Kocour v botách a třetí Hloupý Honza
Na prvních třech místech nemáme možnost volby, uspořádáváme pouze zbývajících 135 uchazečů $\Rightarrow$ $135! \doteq 2,7 \cdot 10^{230}$ možností.

g) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit všichni uchazeči tak, aby byl Hloupý Honza byl první nebo druhý

- Hloupý Honza první $\Rightarrow$ uspořádáváme zbývajících 137 uchazečů $\Rightarrow$ $137!$ možností,
- Hloupý Honza druhý $\Rightarrow$ uspořádáváme zbývajících 137 uchazečů (po uspořádání k nim přidáme za prvního Honzu) $\Rightarrow$ $137!$ možností.

Honza může být buď první nebo druhý $\Rightarrow$ předchozí možnosti sčítáme $\Rightarrow$ celkově $137!+137!=2\cdot137!\doteq1,0\cdot10^{235}$ možností.

h) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit všichni uchazeči tak, aby Kocour v botách nebyl první
Všechna pořadí ($138!$ možností) = pořadí, ve kterých je Hloupý Honza první ($137!$ možností) + pořadí, ve kterých Hloupý Honza první není $\Rightarrow$ pořadí, ve kterých Hloupý Honza první není: $138!-137!=137!(138-1)=137\cdot137!\doteq6,9\cdot10^{236}$ možností.

i) počet všech pořadí, ve kterých mohou předstoupit všichni uchazeči tak, aby byl Hloupý Honza nejhůře desátý,
Počet možností, ve kterých je Hloupý Honza na libovolném předem určeném místě: $137!$ možností, Honza může nastoupit na deseti vyhovujících pořadích $\Rightarrow$ celkově $10\cdot137!\doteq5,0\cdot10^{235}$ možností.

j) počet všech pořadí, ve kterých může předstoupit Zlatovláska před Hloupým Honzou a Kocourem v botách, ostatní libovolně
Všech pořadí je $138!\doteq6,9\cdot10^{236}$.
Hledáme pořadí, kde je Zlatovláska ze zkoumané trojice první, takových je jedna třetina celkového počtu (pořadí vytváříme spravedlivě, pořadí s každým ze zkoumané trojice před oběma zbývajícími musí být stejně $\Rightarrow$ pořadí, kdy Zlatovláska nastoupí před Hloupým Honzou a Kocourem v botách je třetina ze všech, tedy $\frac{138!}{3}\doteq2,3\cdot10^{236}$.

Dodatek: Několik let obsahovala učebnice následující špatné řešení:
Každému pořadí ve kterém je Zlatovláska před Hloupým Honzou, odpovídá jedno pořadí, ve kterém je Hloupý Honza před Zlatovláskou (obě pořadí můžeme zaměnit vzájemným prohozením) $\Rightarrow$ Zlatovláska před Honzou $\frac{138!}{2}$ možností.
Všechna zatím vyhovující pořadí můžeme opět rozdělit na dvě stejně velké skupiny podle toho, zda je dříve Zlatovláska nebo Kocour v botách $\Rightarrow$
$\frac{\frac{138!}{2}}{2}=\frac{138!}{4}=1,7\cdot10^{236}$ možností.
Chybný je v této úvaze druhý krok. Ukážeme si to na konkrétním příkladu pouhých tří účastníků: Hloupého Honzy, Kocoura v botách a Zlatovlásky. Můžeme je uspořádat šesti způsoby: ZHK, ZKH, KZH, KHZ, HKZ, HZK. Pokud

v prvním kole vyřadíme možnosti, kde je H před Z, zbudou tři možnosti ZHK, ZKH, KZH. Je ihned jasné, že nemůžeme dělit dvěma. Chybí totiž možnost KHZ, kterou jsme vyřadili v prvním kole, protože v ní byl H před Z a vůbec jsme se nestarali o to, že na prvním místě byl K. Obecně můžeme říci, že během prvního vyřazování poloviny možností vyřadíme více možností, ve kterých je K před Z (protože preferujeme Z na předních místech pořadí) a nemůžeme tak v druhém kole předpokládat, že stále máme stejným počet možností s Z před K, jako s K před Z.

Př. 14: Petáková:
strana 146/cvičení 47
strana 146/cvičení 48

Shrnutí: Pokud tvoříme z *n* prvků uspořádané *n*-tice máme $n! = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ možností.