10.3.3 Výpočet neurčitých integrálů II

Předpoklady: 10302

Integrační proměnná se do integrálu nepíše pro nic za nic. Funkce může obsahovat proměnných více a na tom, kterou zvolíme jako tu integrační (která se mění), závisí výsledek.

Například:

$$\int (a+x)\,dx = \int a\,dx + \int x\,dx = a\int 1\,dx + \int x\,dx = ax + \frac{x^2}{2} + C$$

(při integrování podle dx hraje a stejnou roli jako třeba číslo 2, roli obyčejné konstanty)

$$\int (a+x)\,da = \int a\,da + \int x\,da = \int a\,da + x\int 1\,da = \frac{a^2}{2} + xa + C$$

(při integrování podle da hraje x stejnou roli jako třeba číslo 2, roli obyčejné konstanty)

Př. 1: Vypočti:
a) $\int (at^2 + e^x)\,dx$ b) $\int (at^2 + e^x)\,dt$ c) $\int (at^2 + e^x)\,da$

a) $\int (at^2 + e^x)\,dx = \int at^2\,dx + \int e^x\,dx = at^2 x + e^x + C$

b) $\int (at^2 + e^x)\,dt = \int at^2\,dt + \int e^x\,dt = a\frac{t^3}{3} + te^x + C$

c) $\int (at^2 + e^x)\,da = \int at^2\,da + \int e^x\,da = \frac{a^2}{2}t^2 + ae^x + C$

Pedagogická poznámka: U předchozí příkladu kontrolujeme výsledek po bodě a), zbývající body kontrolujeme najednou. Největší problémy v druhých dvou bodech studentům dělá integrace členu e^x.

Př. 2: Sestav tabulku pro integrování goniometrických funkcí.

$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

Pedagogická poznámka: Je třeba se studenty prodiskutovat fakt, že tabulka nám nedává žádný návod jak integrovat funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$, protože nemáme žádnou funkci, která by se zderivovala na $\operatorname{tg} x$.

Př. 3: Vypočti:

a) $\int\left(\cos x+2+\frac{1}{2\sin^2 x}\right)dx$ b) $\int\left(a\sin x-\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{\sin a}{\sqrt{x}}\right)dx$

a) $\int\left(\cos x+2+\frac{1}{2\sin^2 x}\right)dx=\int\cos x\,dx+\int 2\,dx+\int\frac{1}{2\sin^2 x}\,dx=\sin x+2x-\frac{\operatorname{cotg} x}{2}+C$

b)

$\int\left(a\sin x-\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{\sin a}{\sqrt{x}}\right)dx=\int a\sin x\,dx-\int\frac{2}{\sin^2 x}\,dx+\sin a\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=$

$=-a\cos x-(-2\operatorname{cotg} x)+\sin a\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-a\cos x+2\operatorname{cotg} x+2\sin a\sqrt{x}+C$

Př. 4: Vypočti:

a) $\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x}dx$ b) $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$ c) $\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx$

a) $\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x}dx=\int\cos x\,dx=\sin x+C$

b) $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}-\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg} x-x+C$

výsledek vypadá dost neuvěřitelně $\Rightarrow$ zkusíme si ho zderivovat:

$(\operatorname{tg} x-x+C)'=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}^2 x$

c) $\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}dx=\int 2\sin x\,dx=-2\cos x+C$

Př. 5: Najdi k funkci $y=3x^2-2x+1$ primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $[1;3]$.

Primitivních funkcí je nekonečně mnoho, liší se o konstantu $\Rightarrow$ vypočteme neurčitý integrál a určíme hodnotu integrační konstanty:

$\int\left(3x^2-2x+1\right)dx=3\int x^2dx-2\int x\,dx+\int dx=3\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+x+C=x^3-x^2+x+C$

Funkce má procházet bodem $[1;3]$: $3=1^3-1^2+1+C \Rightarrow C=2$

Primitivní funkcí s požadovanými vlastnosti je funkce $y=x^3-x^2+x+2$

Př. 6: Najdi k funkci $y=\cos x-2$ primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $\left[\frac{\pi}{2};-1\right]$.

Primitivních funkcí je nekonečně mnoho, liší se o konstantu $\Rightarrow$ vypočteme neurčitý integrál a určíme hodnotu integrační konstanty:

$\int(\cos x-2)\,dx=\int\cos dx-2\int dx=\sin x-2x+C$

Funkce má procházet bodem $\left[\frac{\pi}{2};-1\right]$: $-1=\sin\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{2}+C$

$-1=1-\pi+C \Rightarrow C=\pi-2$

Primitivní funkcí s požadovanými vlastnosti je funkce $y=\sin x-2x+\pi-2$

Hledání primitivních funkcí je často tvrdým oříškem. K čemu je to dobré? Některá využití si ukážeme později, ale trošičku si nakousneme již teď.

Základní problém středoškolské fyziky: Existuje mnoho veličin, které jsou určeny změnou jiné veličiny, například:

- rychlost je změna dráhy za čas: $v=\frac{ds}{dt}$,
- zrychlení je změna rychlosti za čas: $a=\frac{dv}{dt}$.

Přecházet od jedné takové veličiny k druhé jsme dosud dokázali pouze přibližně pomocí grafů. Znalost derivování nám konečně umožňuje určit přesně například funkce pro rychlost a zrychlení, pokud známe funkci pro dráhu.

Například pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu platí: $s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$

derivováním můžeme určit vzorce pro rychlost a zrychlení:

- $v=\frac{ds}{dt}=\left(s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2\right)'=0+v_0+\frac{1}{2}\cdot 2at=v_0+at$,
- $a=\frac{dv}{dt}=\left(v_0+at\right)'=0+a\cdot 1=a$

Drobná nepříjemnost: Většinou jsme v přesně opačné situaci, víme jaké je zrychlení (určíme ho z působících sil) a chceme zjistit funkci, která popisuje rychlost a dráhu (potřebujeme postupovat opačným směrem při derivování v předchozí ukázce).

Obrácený postup k derivování je integrování $\Rightarrow$ zkusíme vyjít ze vztahu pro zrychlení rovnoměrné zrychleného pohybu a dojít integrováním ke vztahům pro rychlost a dráhu.

- $a=a$ (zrychlení je konstantní, nemění se s časem),
- $a=\frac{dv}{dt} \Rightarrow dv=a\cdot dt \Rightarrow v=\int a\,dt=at+C$

  Jaký význam má konstanta *C*? Jde o počáteční hodnotu, ze které jsme vycházeli (například při kreslení grafu primitivní funkce v hodině 100301), v našem případě jde tedy o počáteční hodnotu rychlosti, kterou ve fyzice neznačíme *C*, ale $v_0 \Rightarrow$ pokud platí $a=\text{konstanta}$, platí pro rychlost $v=v_0+at$.

Př. 7: Využij integrování a urči ze vzorce pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu vzorec pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu.

$v=\frac{ds}{dt} \Rightarrow ds=v\cdot dt \Rightarrow s=\int\left(v_0+at\right)dt=v_0t+\frac{1}{2}at^2+C$

C je počáteční hodnota, ze které jsme vycházeli, v našem případě jde tedy o počáteční hodnotu dráhy, kterou ve fyzice neznačíme *C*, ale s_0 $\Rightarrow$ pokud pro pohyb platí $a = \text{konstanta}$, platí pro dráhu $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

Teprve s integrováním dostáváme do ruky nástroje, které nám umožňují přecházet ve fyzice od jedné veličiny k druhé.

Př. 8: Petáková:
strana 164/cvičení 86 a) c) f) h) i) k)

Shrnutí: Integrační proměnná nám říká, která z neznámých se mění a tím určuje jakým způsobem vypočteme integrál. Integrály ze stejných výrazů podle různých proměnných se mohou zcela lišit.