1.1.19 Řešení příkladů na rovnoměrně zrychlený pohyb I

Předpoklady: 010118

Pedagogická poznámka: Cílem hodiny je, aby se studenti naučili samostatně řešit příklady. Aby dokázali najít vztah, který umožňuje příklad vyřešit, dokázali do něj dosadit a vypočítat hodnotu na kalkulačce.
Není cílem složitější vyjadřování ze vztahů ani dosazování z jednoho vzorce do druhého. V tomto okamžiku je to kvůli kolapsu českého školství nad síly většiny žáků, snaha o řešení takových příkladů vede pouze k mechanickému napodobování a učení se příkladům nazpaměť (řádku po řádce). Ke složitějším příkladům se vrátíme později před kruhovým pohybem, v té době by už žáci měli v matematice probrat úpravy výrazů a manipulace se vzorci by pro ně měla být jednodušší.

Př. 1: Vypiš rovnice pro pohybové veličiny popisující rovnoměrně zrychlený pohyb:
a) s nenulovou, b) s nulovou počáteční rychlostí.

Rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb:

- nenulová počáteční rychlost: $v = v_0 + at$, $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$,
- nulová počáteční rychlost: $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$ (vypuštěné členy obsahující v_0).

Vzorce pro nenulovou počáteční rychlost můžeme použít i v případě, že počáteční rychlost je nulová, ale přiděláváme si práci.

Pedagogická poznámka: Další dva příklady jsou opakováním z minulé hodiny. Používám je na znaménkové zkoušení.

Př. 2: Škoda Octavia 1,8 TSI zrychlí z 0 na 100 km/h za 7,8 s. Jakou vzdálenost při tom ujede?

$v_0 = 0\,\text{m/s}$, $v = 100\,\text{km/h} = 27{,}8\,\text{m/s}$, $t = 7{,}8\,\text{s}$, $s = ?$

Dráha: $s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$ potřebujeme znát zrychlení.

Rychlost: $v = at \Rightarrow$ můžeme určit zrychlení.

$v = at \quad / : t$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{27{,}8}{7{,}8}\,\text{m/s}^2 = 3{,}6\,\text{m/s}^2$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot 3{,}6\cdot 7{,}8^2\,\text{m} = 110\,\text{m}$$

Škoda Octavia ujede během zrychlování z 0 na 100 km/h 108 m.

Dodatek: Trochu přesnější výsledek je možné získat obecným dosazením:
$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{v}{t}t^2 = \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}\cdot 27{,}8\cdot 7{,}8\,\text{m} = 108\,\text{m}$. Takový postup je lepší leč v tomto okamžiku nedosažitelný.

Pedagogická poznámka: Můžete nechat žáky dráhu v předchozím příkladu odhadnout. Většina odhadů je podstatně menších než výsledek.

Př. 3: Druhý ze tří stupňů rakety Saturn V (raketa, která do vesmíru vynášela lodě Apollo určené k cestě lidských posádek na Měsíc), začínal pracovat ve výšce 61 km na povrchem Země a během 6 minut činnosti zrychlil raketu z 2400 m/s na 6800 m/s. Urči průměrné zrychlení rakety a uraženou vzdálenost během této části letu.

$v_0 = 2400\ \text{m/s}$, $v = 6800\ \text{m/s}$, $t = 6\,\text{min} = 360\ \text{s}$, $a = ?$, $s = ?$

Z rovnice pro rychlost $v = v_0 + at$ vyjádříme zrychlení: $v - v_0 = at \quad / : t$

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{6800 - 2400}{360}\ \text{m/s}^2 = 12{,}2\ \text{m/s}^2$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 2400 \cdot 360 + \frac{1}{2} \cdot 12{,}2 \cdot 360^2\ \text{m} = 1\,650\,000\ \text{m} = 1\,650\ \text{km}$$

Raketa urazila se zrychlením 12,2 m/s dráhu 1 650 km.

Dodatek: Druhý stupeň rakety se odděloval ve výšce 185 km na povrchem Země. Porovnáním rozdílu výšek ($185 - 61\ \text{km} = 124\ \text{km}$) s uraženou vzdáleností vypočtenou v předchozím příkladu je zřejmé, že směr letu byl v této fázi daleko spíše vodorovný než svislý.

Př. 4: Sestav pohybovou tabulku pro rovnoměrně zrychlený pohyb kamene padajícího s nulovou počáteční rychlostí a se zrychlením $10\,\text{m/s}^2$. Použij časový interval 0,1 s. Ověř výsledek pomocí vzorce pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu.

Pohyb kamene je rovnoměrně zrychlený $\Rightarrow$ můžeme vyplnit nejspodnější řádku tabulky.

čas [s]	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
dráha [m]	0										
rychlost [m/s]	0										
zrychlení [m/s^2]	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Pro změnu rychlosti platí: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $\Rightarrow$ $\Delta v = a \cdot \Delta t = 10 \cdot 0{,}1\,\text{m/s} = 1\,\text{m/s}$ $\Rightarrow$ během každého intervalu vzroste rychlost o $1\,\text{m/s}$ $\Rightarrow$ můžeme postupně doplňovat druhý řádek tabulky.

čas [s]	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
dráha [m]	0										
rychlost [m/s]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
zrychlení [m/s^2]	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Chceme spočítat dráhu v čase 0,1 s. Vzorec: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ $\Rightarrow$ $\Delta s = v \cdot \Delta t$.

Problém: Neznáme rychlost v intervalu 0 s – 0,1 s (rychlost se měnila) $\Rightarrow$ máme dvě možnosti:

- použijeme rychlost v čase 0 s: $\Delta s = v \cdot \Delta t = 0 \cdot 0{,}1\,\text{m} = 0\,\text{m}$ (určitě méně než kámen ve skutečnosti urazil),
- použijeme rychlost v čase 0,1 s: $\Delta s = v \cdot \Delta t = 1 \cdot 0{,}1\,\text{m} = 0{,}1\,\text{m}$ (určitě více než kámen ve skutečnosti urazil).

$\Rightarrow$ Dvě možnosti, jak doplnit tabulku.

Počítáme s rychlostmi na začátku intervalu (dráha vychází menší než ve skutečnosti).

čas [s]	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
dráha [m]	0	0	0,1	0,3	0,6	1	1,5	2,1	2,8	3,6	4,5
rychlost [m/s]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
zrychlení [m/s^2]	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Počítáme s rychlostmi na konci intervalu (dráha vychází větší než ve skutečnosti).

čas [s]	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
dráha [m]	0	0,1	0,3	0,6	1	1,5	2,1	2,8	3,6	4,5	5,5
rychlost [m/s]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
zrychlení [m/s^2]	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Výpočet pomocí vzorce: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1^2\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}$.
Spočtená vzdálenost leží přesně uprostřed mezi hodnotami z tabulek.

Při obou výpočtech v tabulkách děláme chybu. Předpokládáme, že rychlost byla během celého intervalu konstantní, ale ona se měnila. Čím delší interval používáme (tím méně platí náš předpoklad o stále stejné rychlosti), tím větší chyba ve výpočtu vznikne.

Dodatek: Vyvstává otázka, proč se vlastně zabývat počítáním v tabulce, když pomocí daleko většího počtu výpočtů získáme méně přesný výsledek než při dosazování do vzorce. Důvod je jednoduchý. Zatímco princip počítání v tabulce je jednoduchý a nijak nesouvisí s tím, o jaký způsob pohybu se jedná. Vzorce musíme pro každý druh pohybu sestavovat znovu, což u dalších pohybů velmi obtížné, často dokonce nemožné (více v plánovaném doplňku o modelování).

Př. 5: Výtah se rozjíždí přibližně rovnoměrně se zrychlením $1,5\ \mathrm{m/s^2}$ tak, že po rozjezdu vyjede rovnoměrně o šest pater výše za 13 sekund. Jedno patro má výšku 3,5 m. Jakou rychlostí jezdí výtah rovnoměrně? Jak dlouho se rozjíždí? Jakou při rozjíždění ujede vzdálenost?

Pohyb výtahu má dvě části: rovnoměrně zrychlené rozjíždění a rovnoměrný pohyb po zbytek jízdy.
Více informací máme o rovnoměrném pohybu: $s = 6\cdot 3,5\ \mathrm{m} = 21\ \mathrm{m}$, $t = 12\ \mathrm{s}$, $v = ?$

$s = vt \quad / : t$

$v = \frac{s}{t} = \frac{21}{13}\ \mathrm{m/s} = 1,6\ \mathrm{m/s}$

Během rovnoměrné jízdy se výtah pohyboval rychlostí 1,6 m/s.

Rovnoměrně zrychlené rozjíždění výtahu: $v_0 = 0$, $v = 1,6\ \mathrm{m/s}$ (konečná rychlost výtahu na konci rozjíždění je zároveň rychlostí, kterou se výtah pohybuje během rovnoměrné části jízdy), $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$, $t = ?$, $s = ?$
Rychlost: $v = at \quad / : a$

$t = \frac{v}{a} = \frac{1,6}{1,5}\ \mathrm{s} = 1,1\ \mathrm{s}$

Dráha: $s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot 1{,}1^2\ \mathrm{m}=0{,}91\,\mathrm{m}$

Výtah jezdí rychlostí 1,6 m/s, rozjíždí se 1,1s na dráze 0,91 m.

Př. 6: Cyklista za minutu ujel přibližně rovnoměrně vodorovný úsek silnice o délce 500 m. Během jízdy z kopce trvající 20 s rovnoměrně zrychlil na 40 km/h. S jakým zrychlením se pohyboval při jízdě z kopce? Jak byl kopec dlouhý?

Vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb: $v=v_0+at$, $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ $\Rightarrow$ v prvním neznáme dvě veličiny (v druhém dokonce tři) $\Rightarrow$ musíme do prvního vzorce zjistit počáteční rychlost, zřejmě z rovnoměrného pohybu po rovině.

Rovnoměrný pohyb: $s=500\,\mathrm{m}$, $t=1\,\mathrm{min}=60\,\mathrm{s}$, $v=?$

$s=vt\quad /:t$

$v=\frac{s}{t}=\frac{500}{60}=8{,}3\,\mathrm{m/s}$

Rovnoměrně zrychlený pohyb: $v_0=8{,}3\,\mathrm{m/s}$, $v=40\,\mathrm{km/h}=11\,\mathrm{m/s}$, $t=20\,\mathrm{s}$, $a=?$, $s=?$

$v=v_0+at\quad /-v_0$

$v-v_0=at\quad /:t$

$a=\frac{v-v_0}{t}=\frac{11-8{,}3}{20}\,\mathrm{m/s^2}=0{,}14\,\mathrm{m/s^2}$

$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2=8{,}3\cdot 20+\frac{1}{2}0{,}14\cdot 20^2\ \mathrm{m}=190\ \mathrm{m}$

Na vodorovném úseku jel cyklista přibližně rychlostí 8,3 m/s. Při jízdě z kopce zrychloval se zrychlením $0{,}14\,\mathrm{m/s^2}$. Sjezd byl dlouhý 190 m.

Př. 7: Béra a Máma šli se svými rodinami na výlet na Kunětickou horu. Obě rodinky se zastavily u místní studny a tatíci začali spekulovat, jak zjistit její hloubku. Navrhni způsob, jakým je možné studnu změřit. Pokus se odladit postup tak, aby byl výsledek co nejpřesnější.

Můžeme vzít předmět a pustit jej do studny. Stejně jako jiné předměty i on padá (pokud nepůsobí významně odpor vzduchu) se zrychlením $10\,\mathrm{m/s^2}$. Můžeme změřit dobu pádu a z ní spočítat uraženou dráhu (která je hloubkou studny).

Potřebujeme, aby zrychlení pádu bylo pořád stejné $\Rightarrow$ odpor vzduchu by měl hrát co nejmenší roli $\Rightarrow$ kámen by měl být malý a těžký, pokud možno kulatý.

Př. 8: Máma si připravil stopky a odpočítal vržení kamene: „Připravit, pozor, teď". Béra pustil kámen, Máma stiskl stopky a zastavil je, když uslyšel pád kamene na dno. Naměřil 2,9 s. Urči hloubku studny.

$a=10\,\mathrm{m/s^2}$, $t=2{,}9\,\mathrm{s}$, $s=?$

$s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2{,}9^2\ \mathrm{m}=42\,\mathrm{m}$

Studna je hluboká přibližně 42 m.

Př. 9: Chvilku poté, co Béra s Mámou změřili hloubku studny, na ně zavolaly jejich manželky, které objevily informační tabuli. Na ní se oba experimentátoři dočetli, že původně 70 hluboká studna je z větší části zasypána a v současnosti je hluboká pouze 23 m. Autorita obou otců u jejich dětí tím znatelně poklesla a tak oba začali přemýšlet, kde udělali chybu. Při opakovaném měření naměřili dobu pádu pouze 2,2 s. Co způsobilo chybu při prvním měření a jak ji Béra s Mámou napravili? Jakou hloubku studny naměřili?

Čas v prvním pokusu byl delší než skutečný čas pádu. Upuštění kamene Máma odpočítal a tak začal měřit ihned v okamžiku, kdy Béra kámen upustil. Stopky však zastavil později, protože reagoval na zvuk (člověk vždy reaguje s určitým zpožděním, kterému se říká reakční doba). Vylepšená verze pokusu: Máma je připraven, ale otočen zády k Bérovi, který neodpočítává, ale zakřičí „Teď!“ ve chvíli, kdy kámen upustí. Máma tak musí reagovat na zvuk stejně jako o chvíli později, když stopky zastavoval. V obou případech zmáčkne tlačítko přibližně se stejným zpožděním a měření času tak nebude tolik zkresleno reakční dobou.

Hloubka naměřená v druhém případě: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2,2^2 \text{ m} = 24,2 \text{ m}$.

Shrnutí: Při řešení příkladů musíme používat pro různé druhy pohybů odpovídající vzorce.